Guía de Estudios

de Trigonometría.

Contenido

TRIGONOMETRÍA....4
1 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS....5
1.1. Seno, coseno y tangente....5
1.2. Funciones trigonométricas para los ángulos notables 30º, 45º y 60º....9
1.3 Operaciones con funciones....11
1.4 Cálculo de triángulos rectángulos....13
2 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS....21
2.1 Círculo trigonométrico y funciones trigonométricas de ángulos complementarios, suplementarios, etc....21
2.2 Identidades trigonométricas suma y diferencia....25
RESUMEN DE FUNCIONES....26
Comprobación de identidades trigonométricas....27
2.3 Funciones trigonométricas de la suma y diferencia de los ángulos....29
2.4 Resolución de triángulos oblicuángulos....30
EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN....38

INTRODUCCIÓN.

En este cuaderno de estudio se utiliza un lenguaje claro y preciso que propicie la generación de conocimientos que generalmente resultan difíciles de entender y aprender, ya que va de acuerdo a las nuevas y variadas formas metodológicas que favorecen el proceso de enseñanza-aprendizaje.

La didáctica utilizada en este cuaderno se fundamenta en la exposición de conceptos de introducción, motivos, ejemplos demostrativos, diferentes modelos de planteamiento de problemas, ejercicios que permitan llevar una evaluación continua.

El éxito de la enseñanza y del aprendizaje de las Matemáticas consiste en verlas como una disciplina que se interrelaciona con las otras materias y su aplicación con el medio cotidiano en que nos desenvolvemos.

El propósito de esta guía es entonces, facilitar el estudio de las Matemáticas para que el alumno logre una preparación y una enseñanza para toda su vida.

La trigonometría es una rama de la matemática, cuyo significado etimológico es "La medición de los triángulos". En términos generales, es el estudio de las razones trigonometrías: Seno, Coseno, Tangente, Cotangente, Secante y Cosecante. Interviene directa o indirectamente en las demás ramas de la matemática y se aplica a otras ramas de la geometría, como es el caso del estudio de las esferas en la geometría en el espacio

OBJETIVO GENERAL

Determinar las medidas de los lados y ángulos de triángulos rectángulos y oblicuángulos, a través de la aplicación de las razones e identidades trigonométricas, leyes de senos y cosenos. Resolución de problemas.

GLOSARIO

- **CATETOS:** Son los lados de un triángulo rectángulo que forman el ángulo recto.
- **HIPOTENUSA:** Es el lado del triángulo rectángulo que se opone al ángulo recto.
- **TEOREMA DE PITÁGORAS:** "El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma del cuadrado de los catetos".
- **ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS:** Son dos ángulos cuya suma vale 90º.
- **ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS:** Son dos ángulos cuya suma vale 180º.
- **ÁNGULOS EXPLEMENTARIOS:** Son ángulos que suman 360º.

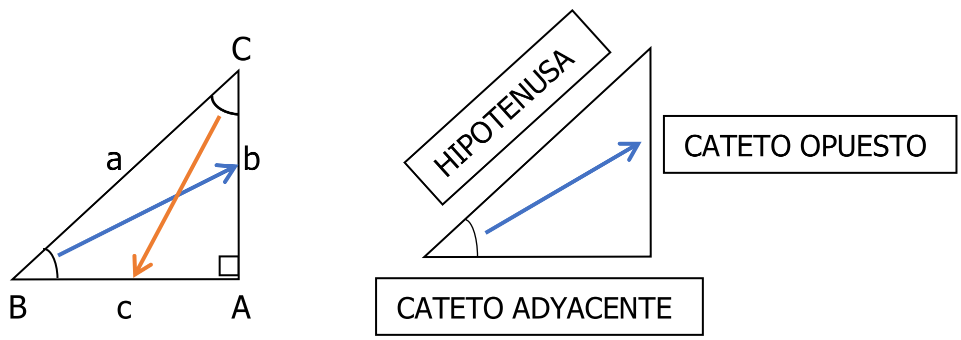
1 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

La Trigonometría se fundamenta en algunas relaciones que se llaman funciones trigonométricas y que se definen como:

Funciones Trigonométricas: Son las razones entre elementos rectilíneos de un triángulo, ligados a un ángulo, cuya variación depende de la variación del ángulo.

1.1. Seno, coseno y tangente

Considerando el Triángulo Rectángulo de lados abc; las funciones trigonométricas de los ángulos agudos B y C son las siguientes:



- **SENO:** Es la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa

$$Sen\ B = \frac{b}{a} \qquad Sen\ C = \frac{c}{a}$$

- **COSENO:** Es la razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa

$$Cos\ B = \frac{c}{a} \qquad cos\ C = \frac{b}{a}$$

- **TANGENTE**: Es la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente

$$Tan\ B = \frac{b}{c} \qquad Tan\ C = \frac{c}{b}$$

- **COTANGENTE:** Es la razón entre el cateto adyacente y el cateto opuesto

$$Cot\ B = \frac{c}{b} \qquad Cot\ C = \frac{b}{c}$$

- **SECANTE:** Es la razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente

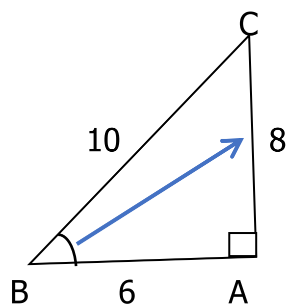
$$Sec\ B = \frac{a}{c} \qquad Sec\ C = \frac{a}{b}$$

- **COSECANTE:** Es la razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto

$$Csc\ B = \frac{a}{b} \qquad Csc\ C = \frac{a}{c}$$

TEOREMA DE PITÁGORAS: El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma del cuadrado de los dos catetos, tenemos que: $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Ejemplo:



Dado un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 6cm y 8cm, calcular las funciones trigonométricas del ángulo agudo mayor.

$BC^2 = AB^2 + AC^2$
$BC^2 = 6^2 + 8^2$
$BC^2 = 36 + 64$
$BC^2 = 100$

$BC = \sqrt{100}$
$BC = 10$

A mayor lado se opone mayor ángulo.

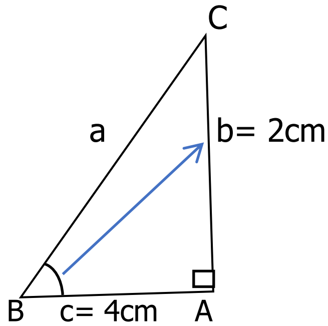
$$Sen\ B = \frac{8}{10} = 0.08 \qquad Cot\ B = \frac{6}{8} = 0.75$$

$$Cos\ B = \frac{6}{10} = 0.60 \qquad Sec\ B = \frac{10}{6} = 1.67$$

$$Tan\ B = \frac{8}{6} = 1.33 \qquad Csc\ B = \frac{10}{8} = 1.25$$

Ejercicios:

En el triángulo ABC (A = 90º), calcular las funciones trigonométricas del ángulo B y C, si b=2cm y c=4cm.



$a^2 = b^2 + c^2$

$a^2 = (2cm)^2 + (4cm)^2$

$a^2 = 4cm^2 + 16cm^2$

$a^2 = 20cm^2$

$a^2 = \sqrt{20cm^2}$

$a = \sqrt{(4)(5)cm^2}$

$a = 2\sqrt{(5)}cm$

$$Sen\ B = \frac{2cm}{2\sqrt{(5)}cm} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right) = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$Csc\ B = \frac{2\sqrt{(5)}cm}{2cm} = \sqrt{5}$$

$$Cos\ B = \frac{4cm}{2\sqrt{(5)}cm} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

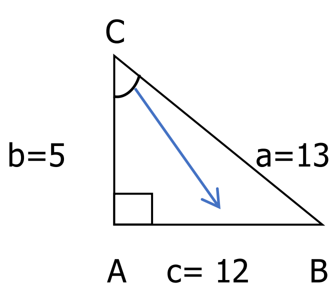
$$Sec\ B = \frac{2\sqrt{(5)}cm}{4cm} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$Tan\ B = \frac{2cm}{4\ cm} = \frac{1}{2}$$

$$Cot\ B = \frac{4cm}{2\ cm} = 2$$

Ejemplo:

1. *Por el Teorema de Pitágoras se tiene:*



$AB = \sqrt{(BC)^2 - (AC)^2} = \sqrt{(13)^2 - (5)^2}$

$AB = \sqrt{(169)^2 - (25)^2} = \sqrt{144} = 12$

$c = 12$

Calcular las funciones trigonométricas del ángulo

$Sen\ B = \frac{c}{a} = \frac{12}{13} = 0.9231$

$Cos\ B = \frac{b}{a} = \frac{5}{13} = 0.3846$

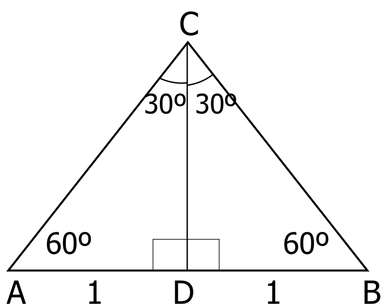
$Tan\ B = \frac{c}{b} = \frac{12}{5} = 2.4$

$Cot\ B = \frac{b}{c} = \frac{5}{12} = 0.4166$

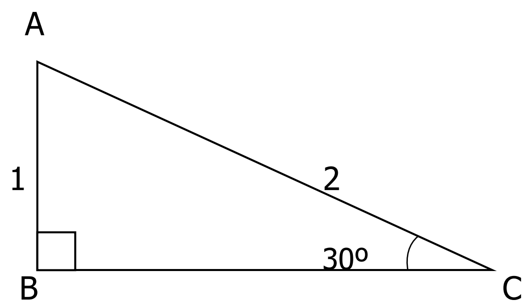
$Sec\ B = \frac{a}{b} = \frac{13}{5} = 2.6$

$Csc\ B = \frac{12}{13} = 1.083$

1.2. Funciones trigonométricas para los ángulos notables 30º, 45º y 60º.



Sea Δ un triángulo equilátero, en donde la longitud de cada uno de sus lados sea 2 unidades; trazando su altura, se obtienen dos triángulos rectángulos.



AC = Hipotenusa = 2
AB = Cateto opuesto = 1
BC = Cateto Adyacente = ?

Por el Teorema de Pitágoras

BC = $\sqrt{(AC)^2 - (AB)^2} = \sqrt{(2)^2 - (1)^2}$

BC = $\sqrt{4-1}$

BC = $\sqrt{3}$

$Sec(30°) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Funciones Trigonométricas de 30º

$Sen(30°) = \frac{1}{2}$

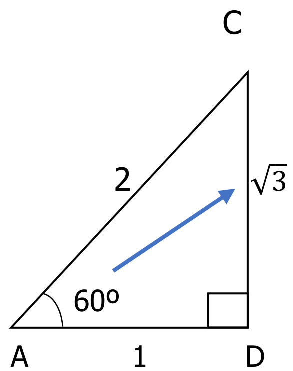
$Cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$Tan(30°) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$Cot(30°) = \sqrt{3}$

$Csc(30°) = 2$

Si tomamos como referencia el triángulo ∆ ACD y el ángulo 60º, tenemos que



Hipotenusa = 2
Cateto Opuesto √ 3
Cateto Adyacente = 1

$Cot(60°) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$Sen(60°) = \sqrt{3}$

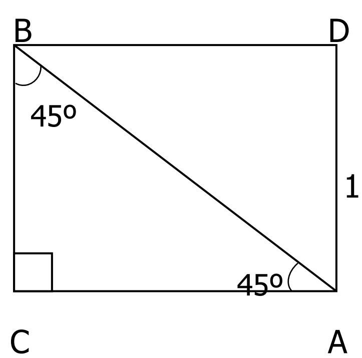
$Sec(60°) = \frac{2}{1} = 2$

$Cos(60°) = \frac{1}{2}$

$Csc(60°) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$Tan(60°) = \sqrt{3}$

Para determinar las funciones de un ángulo de 45º se considera el triángulo ∆ ABC que se forma al trazar la diagonal AB en un cuadrado cuyos lados miden la unidad.



Por el Teorema de Pitágoras

AB = $\sqrt{(BC)^2 + (AC)^2}$

AB = $\sqrt{(1)^2 + (1)^2}$

AB = $\sqrt{2}$

Hipotenusa = ?

C. Opuesto = 1

C. Adyacente = 1
Funciones trigonométricas de 45º

$Sen(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$Cos(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$Tan(45°) = \frac{1}{1} = 1$

$Cot(45°) = \frac{1}{1} = 1$

$Sec(45°) = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$

$Csc(45°) = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$

Resumen de los valores de las funciones trigonométricas de 30º, 45º y 60º.

FUNCIÓN	30º	45º	60º
Sen	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}$
Cos	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2
Tan	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$
Cot	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$
Sec	$2\sqrt{3}/3$	$\sqrt{2}$	2
Csc	2	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}/3$

1.3 Operaciones con funciones

1) $5Sen^2(45°) + 8Cos^2(30°)$

$= 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$=5\left(\frac{2}{4}\right) + 8\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{10}{4}\right) + \left(\frac{24}{4}\right) = \left(\frac{34}{4}\right) = 8\left(\frac{2}{4}\right) = 8\left(\frac{1}{2}\right)$

2) $3Sen(30°) + 6Cos^2(45°)$

$= 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$=5\left(\frac{2}{4}\right) + 8\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{10}{4}\right) + \left(\frac{24}{4}\right) = \left(\frac{34}{4}\right) = 8\left(\frac{2}{4}\right) = 8\left(\frac{1}{2}\right)$

3) $5Tan^2(45°) + 2Sec^2(45°)$

$=5(1)^2 + 2(\sqrt{2})^2 = 5 + 4 = 9$

Ejercicios:

1) $4Cos(60°) + 5Csc(30°) =$
2) $4Cos(30°) + 6Sen(45°) =$
3) $6Tan(30°) + 2\,Csc(45°) =$
4) $Sen^2(30°) + Sec^2(45°) =$
5) $Cos^2(60°) + Sen^2(45°) =$
6) $\frac{Sen(30°)+Csc(30°)}{Sen^2(30°)+Cos^2(60°)}$

7) $\frac{Sen^2(45°)+Sen^2(30°)}{Sen^2(45°)+Cos^2(45°)}$

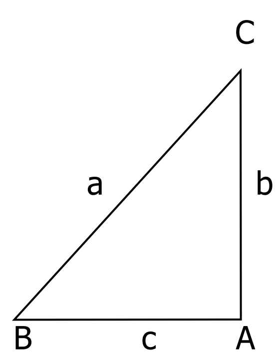
8) $\frac{Cos^2(30°)+Tan^2(30°)}{Sen^2(45°)+Cos^2(60°)}$

1.4 Cálculo de triángulos rectángulos

Como hemos visto, un triángulo rectángulo consta de seis elementos, 3 ángulos y 3 lados; si se conocen 3 de ellos, siempre uno de los datos sea un lado, podemos determinar un triángulo.

En el caso de los triángulos rectángulos, como tienen un ángulo recto, se puede determinar si se conocen dos de sus otros elementos, siempre uno de ellos sea un lado. Esto nos conduce a los siguientes casos para la resolución de triángulos rectángulos.

1er.. Caso. Dados los dos catetos.



Datos	Incógnitas
b=50m	a=?
c=64m	B=?
A=90º	C=?

Cálculo de A

$a = \sqrt{b^2 + c^2}$

$a = \sqrt{50^2 + 64^2}$

$a = \sqrt{2500 + 4096}$

$a = \sqrt{6596}$

$a = 81.21m$

Cálculo de B

$tanB = \frac{50}{64}$

$tanB = 0.7812$

$B = 38°$

Cálculo de C

C= 90º - B

C = 90º - 38

C = 52°

Ejemplos:

b= 50º
c= 40º
A=90º

a=?
B=?
C=?

$a = \sqrt{b^2 + c^2}$

$a = \sqrt{50^2 + 40^2}$

$a = \sqrt{2500 + 1600}$

$a = \sqrt{4100}$

$tanB = \frac{50}{40}$

$tanB = 1.25$

C = 90º - B

C = 90º - 51º 20' 25"

C= 38º 39' 35"

a= 64.03

2)
b=14
c=18
A = 90º

$a = \sqrt{b^2 + c^2}$

$a = \sqrt{14^2 + 18^2}$

$a = \sqrt{196 + 324}$

$a = \sqrt{520}$

$a = 81.21m$

$\boxed{a=22.8}$

$tanB = \frac{14}{18}$

$tanB = 0.7777$

$\boxed{B= 37º\ 52'\ 20''}$

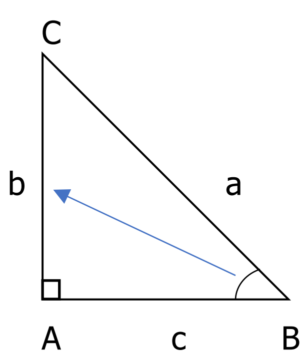
C= 90º - 37º52'20

$\boxed{C= 52º\ 07'\ 40''}$

Ejercicios:

b=22	b=30	b=60
c=45	c=40	c=80

2º. Caso. Dados un cateto y la hipotenusa.



Datos	Incógnitas
a=60cm	b=?
c=28cm	B=?
A=90º	C=?

Calculo de b

$b = \sqrt{a^2 - c^2}$

$b = \sqrt{60^2 - 28^2}$

$b = \sqrt{3600 - 784}$

$b = \sqrt{2816}$

Cálculo de B

$CosB = \frac{28}{60}$

$CosB = 0.4666$

B=62º 11' 10"

Calculo de C

C= 90º - 62º 11' 10"
B= 53.07

C = 27º 48' 50"

Ejercicios:

1) a = 30
b=25

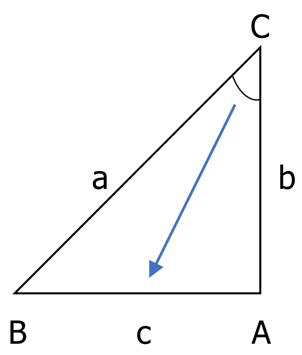
2) a=7.50
b=5.25

3) a=5.3
b=4.7

4) a=11.8
b=3.8

5) a=9.3
c=6.2

3er. Caso. Dados un cateto y un ángulo agudo.



Datos	Incógnitas
B =1.4	a=?
C=37º	c=?
A=90º	B=?

B= 90º - C

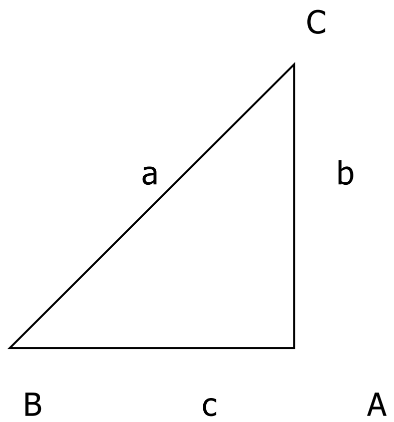
tan C = $\frac{c}{b}$ ∴ c = b tan C

c = 60
C = 28º 30'

$SenB = \frac{b}{a}$ a = $\frac{b}{SenB}$

b = 30 C = 40º 30' a = 45 B = 65º 50'

4º. Caso. Dados la hipotenusa y un ángulo agudo.



Datos	Incógnitas
a =20.1	b =?
C = 38º 16'	c=?
A = 90º	B = ?

Calculo de B

B= 90º - C

= 90º- 38'16"

= 51º44'

Cálculo de b

$SenB = \frac{b}{a}$

b = a sen B

b = 20.1 sen 51º44'

b = 20.1 (0.7851)

b = 15.78

Cálculo de C

$SenC = \frac{c}{a}$

c = a Sen C

c = 20.1 sen 38º16'

c = 20.1 (0.6193)

c = 12.45

Ejercicios:

a = 4
B = 62º30'

a = 43.5
B = 38º

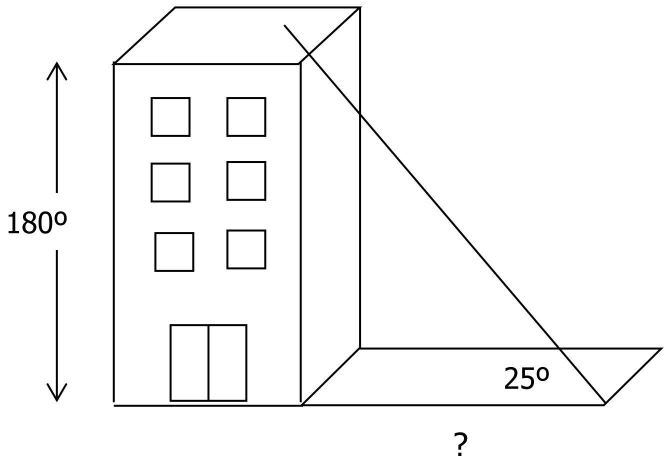
a = 57.7
C = 29º

a = 90
C = 20º

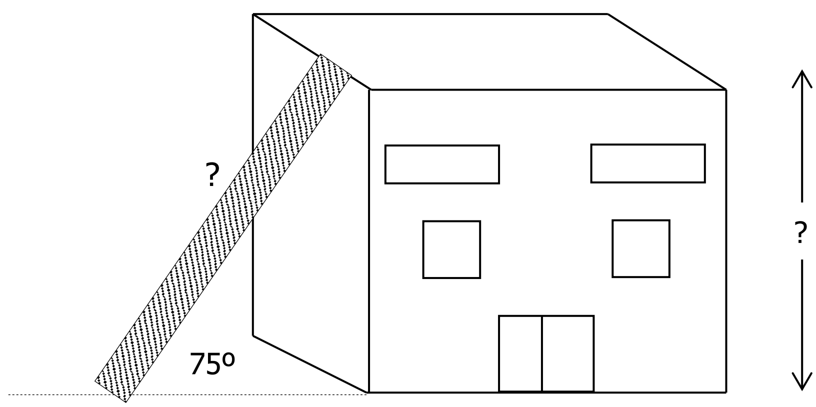
a = 175.5
C = 27º15'

Ejercicios de aplicación: (coteja las respuestas con tu asesor)

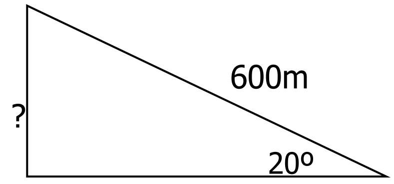
1. ¿Cuál es la longitud de la sombra proyectada de un edificio de 180m de altura, cuando el Sol se ha elevado 25º sobre el horizonte?



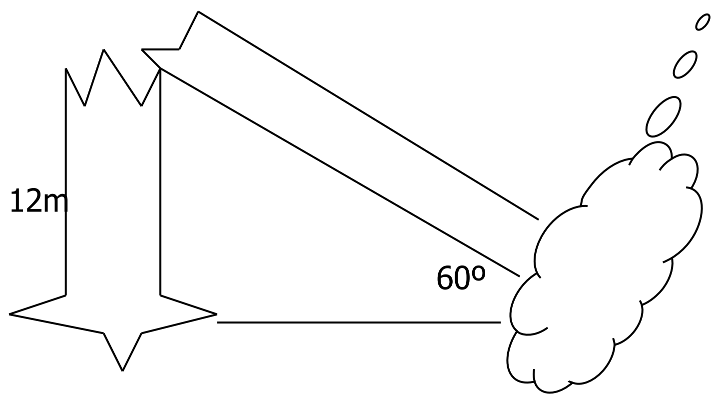
2. Una escalera de mano está apoyada contra la pared de una casa, de modo que del pie de la escalera al edificio hay 8m; ¿a que altura del suelo se encuentra el extremo superior de la escalera y cuál es la longitud de la misma, si forma un ángulo de 75º con el suelo?



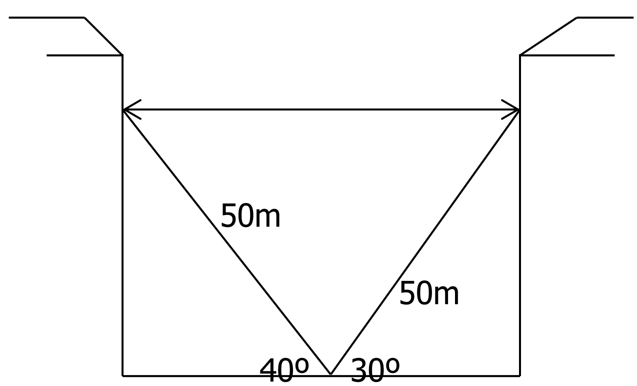
3. Un hombre recorre 600m a lo largo de un camino que tiene una inclinación de 20º respecto al horizonte ¿qué altura alcanza con relación al punto de partida?



4. Un árbol derribado por el viento forma un triángulo rectángulo con el suelo. ¿Qué altura tenía el árbol si la parte que ha caído forma con el suelo un ángulo de 60º y si la parte del tronco que ha quedado en pie tiene una altura de 12m?



5. Una escalera de mano, cuyo pie está sobre la calle, forma un ángulo de 30º con el suelo cuando su extremo superior se apoya en un edificio situado en uno de los lados de la calle, y forma un ángulo de 40º si se apoya en el edificio situado en el otro lado de la calle, si la longitud de la escalera es de 50m, ¿cuál es el ancho de la calle?

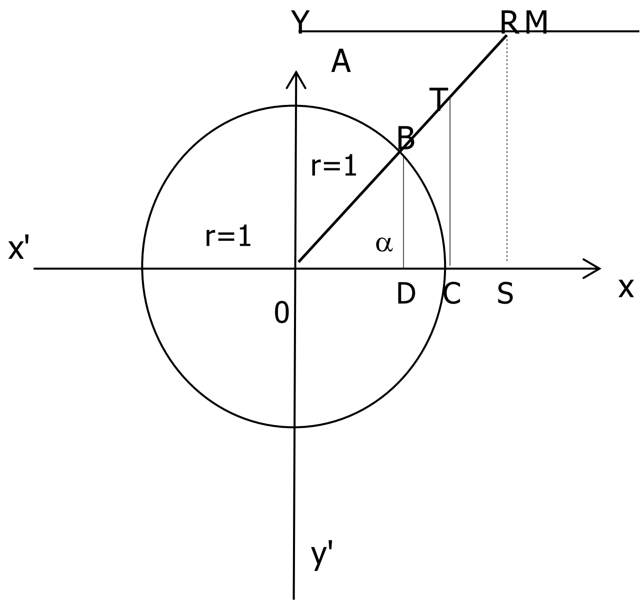


2 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

2.1 Círculo trigonométrico y funciones trigonométricas de ángulos complementarios, suplementarios, etc.

- **Círculo Trigonométrico**

Es aquel cuyo radio vale la unidad.



En cada uno de los otros cuadrantes la representación se obtiene de manera análoga.

$\overline{BD} \perp \overline{OX} \quad \overline{TC} \perp \overline{OX}$
$\overline{AM} \perp \overline{OX} \quad \overline{RS} \perp \overline{OX}$

Aplicando las funciones trigonométricas.

$$Sen\ \alpha = \frac{\overline{BD}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{BD}}{r} = \frac{\overline{BD}}{1} = \overline{BD}$$

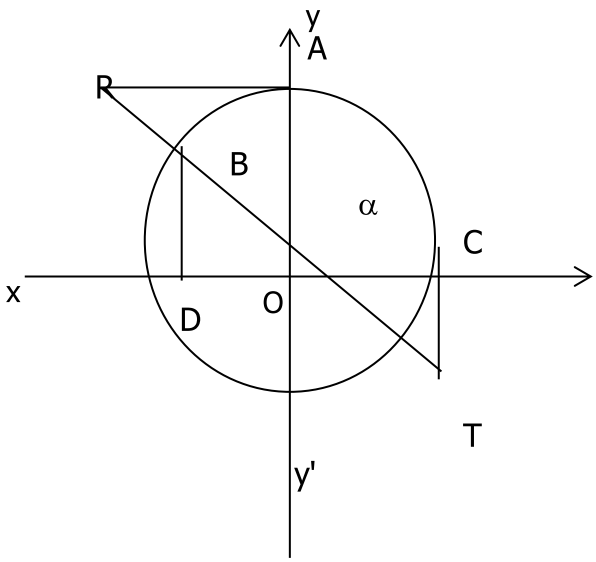
$$Cos\ \alpha = \frac{\overline{OD}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OD}}{r} = \frac{\overline{OD}}{1} = \overline{OD}$$

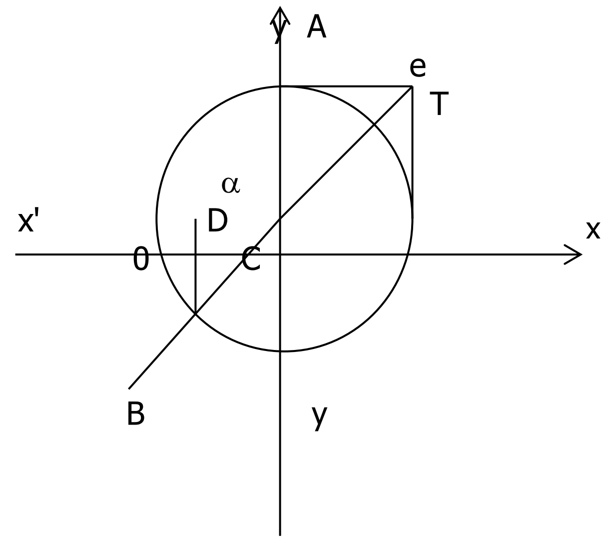
$$Tan\ \alpha = \frac{\overline{BD}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{TC}}{\overline{OC}} = \frac{TC}{r} = \frac{TC}{1} = TC$$

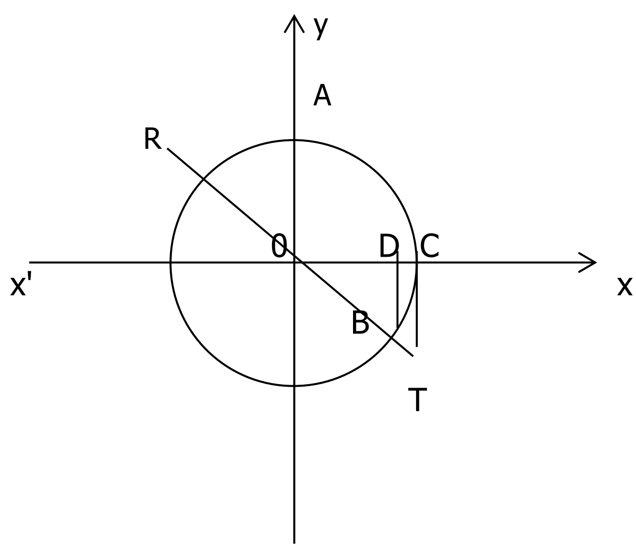
$$Cot\ \alpha = \frac{\overline{OD}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OS}}{\overline{OR}} = \frac{AR}{OA} = \frac{AR}{1} = AR$$

$$Sec\ \alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OT}}{\overline{OC}} = \frac{OT}{r} = \frac{OT}{1} = OT$$

$$Csc\ \alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{OR}}{\overline{RS}} = \frac{OR}{OA} = \frac{OR}{1} = OR$$







Los ángulos que se relacionan en estas reducciones son los complementarios y suplementarios por defecto y por exceso y los explementarios por defecto.

a) Dos ángulos son complementarios por defecto cuando se suma vale 90º y son complementarios por exceso cuando su diferencia vale 90º.

b) Dos ángulos son suplementarios por defecto cuando su suma vale 180º y suplementarios por exceso cuando su diferencia vale 180º.

c) Dos ángulos son explementarios por defecto cuando su suma vale 360º

Función Directa: Es aquella que se obtiene dada la función y el ángulo y se halla el valor natural, para lo cual utilizan las tablas o la calculadora científica.

Ejemplos:

1) Hallar el valor de sen 35º

En la tabla se busca la función "seno natural". En la columna "N" se localiza el valor 35º y sobre el mismo renglón en la columna "0" se encuentra el valor 0.5736.

Sen 35º = 0.5736

2) Hallar el valor del cos 73º 40'

En la tabla se busca la función "coseno natural", se localiza en la columna "N" el valor 73º y en el mismo renglón, en la columna de 40', se encuentra el valor 0.2812

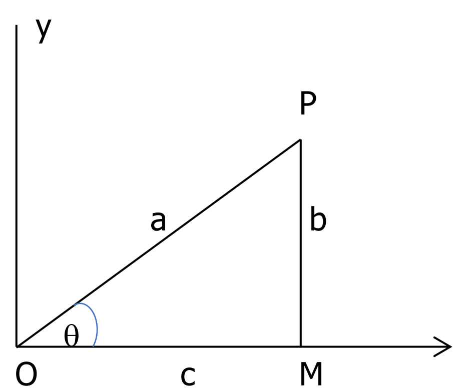
Cos 73º 40' = 0.2812

Función Reciproca: Dos cantidades son recíprocas, si al multiplicarlas por su inverso dan como resultado la unidad.

$\frac{2}{5}$ es recíproco de $\frac{5}{2}$ porque

$\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} = 1$

De lo cual podemos decir que dos funciones trigonométricas son reciprocas si un producto es igual a la unidad.



hip = a
co = b
ca = c

Sen $\theta = \frac{b}{a}$

Cos $\theta = \frac{c}{a}$

Tan $\theta = \frac{b}{c}$

Cot $\theta = \frac{c}{b}$

Sec $\theta = \frac{a}{c}$

Csc $\theta = \frac{a}{b}$

Sen $\theta = \frac{b}{a}$ es recíproca de Csc$\theta = \frac{a}{b}$

$\underline{b} \cdot \underline{a} = \underline{ab} = 1$

cos$\theta = \frac{c}{a}$ es recíproca de Sec$\theta = \frac{a}{c}$

$\underline{c} \cdot \underline{a} = \underline{ac} = 1$

tan$\theta = \frac{b}{c}$ es recíproca de Cot$\theta = \frac{c}{b}$

$\underline{b} \cdot \underline{c} = \underline{bc} = 1$

F**unción Inversa:** la expresión sen x, se denomina "seno inverso de", "anti-seno de x" y también "arco de seno de x", que significa "el ángulo cuyo seno es x".

Si establecemos que el seno del ángulo x es igual a "y", es decir sen x=4 y ó x= sen y.
Las Funciones Trigonométricas son:

Sen x	ó	arc. Sen x
Cos x	ó	arc. Cos x
Tan x	ó	arc. Tan x
Cot x	ó	arc. Cot x
Sec x	ó	arc. Sec x
Csc x	ó	arc. Csc x

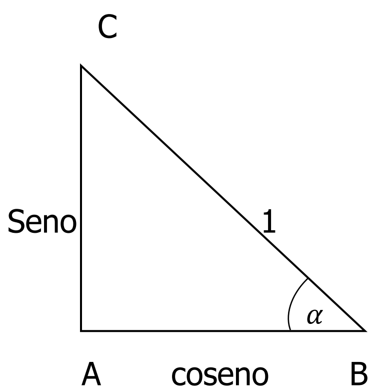
Las funciones trigonométricas inversas se aplican en la determinación del valor del ángulo de una función trigonométrica, cuando se conoce su valor natural.

Ejemplo:
Dada la tan C= 1.854, se escribe basándose en las funciones trigonométricas inversas como
< C= arc. Tan 1.854
< C= 61º 39'

2.2 Identidades trigonométricas suma y diferencia

Identidad Trigonométrica: es una igualdad algebraica entre razones de un mismo ángulo que se cumple para cualquier valor asignado al ángulo.

Si trazamos un triángulo rectángulo, en el cual, a partir de un ángulo agudo $\propto$, el cateto opuesto se relaciona con el seno y el cateto adyacente con el coseno y a la hipotenusa le damos el valor de la unidad, se tiene lo siguiente:



Identidades Fundamentales

a) Identidades Pitagóricas

Aplicando el Teorema de Pitágoras

$\text{sen}^2 \propto + \cos^2 \propto = 1$

$\text{sen}^2 \propto = 1 - \cos^2 \propto$

$1 + \tan^2 \propto = \sec^2 \propto$

$1 + \cot^2 \propto = \csc^2 \propto$

b) De cocientes

$\text{Tan}\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{Cos\ \alpha}$

$\text{Cot}\ \alpha = \frac{Cos\ \alpha}{Sen\ \alpha}$

c) Recíprocas

$\text{Cot}\ \alpha = \frac{1}{Tan\ \alpha}$

$\text{Sec}\ \alpha = \frac{1}{Cos\ \alpha}$ $\qquad$ $\text{Csc}\ \alpha = \frac{1}{Sen\ \alpha}$

Ejemplo:

1. Dado el coseno de un ángulo, calcular las demás funciones trigonométricas.

Seno: $\text{Sen}^2 \propto + \text{Cos}^2 \propto = 1$

$\text{Sen}^2 \propto = 1 - \text{Cos}^2 \propto$

$Sen\ \alpha = \sqrt{1^2 - cos^2\alpha}$

Tangente: $\text{Tan}\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{Cos\ \alpha}$

Pero como $\text{Sen}^2 \propto = 1 - \text{Cos}^2 \propto$

$$\boxed{\text{Tan}\ \alpha = \frac{\sqrt{1^2 - cos^2\alpha}}{Cos\ \alpha}}$$

Cotangente: Cot $\alpha = \frac{Cos\ \alpha}{Sen\ \alpha}$, pero sen $\alpha = \sqrt{1^2 - cos^2\alpha}$

$$\boxed{\text{Cot } \alpha = \frac{Cos\ \alpha}{\sqrt{1^2 - cos^2\alpha}}}$$

Secante:

$$\boxed{\text{Sec } \alpha = \frac{1}{Cos\alpha}}$$

Cosecante:

$$\boxed{\text{Csc } \alpha = \frac{1}{Sen\alpha}}$$

pero sen $\alpha = \sqrt{1^2 - cos^2\alpha}$

$$\text{Csc } \alpha = \frac{1}{\sqrt{1^2 - cos^2\alpha}}$$

RESUMEN DE FUNCIONES:

	sen α	Cos α	tan α	cot α	Sec α	csc α
Sen α		$\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$	$\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{\sec^2\alpha - 1}}{\sec\alpha}$	$\frac{1}{\csc\alpha}$
Cos α	$\sqrt{1 - \text{sen}^2\alpha}$		$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$	$\frac{1}{\sec\alpha}$	$\frac{\sqrt{\csc^2\alpha - 1}}{\csc\alpha}$
Tan α	$\frac{\text{sen}\,\alpha}{\sqrt{1 - \text{sen}^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$		$\frac{1}{\cot\alpha}$	$\sqrt{\sec^2\alpha - 1}$	$\frac{1}{\sqrt{\csc^2\alpha - 1}}$
Cot α	$\frac{\sqrt{1 - \text{sen}2\alpha}}{\text{sen}\,\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{\tan\alpha}$		$\frac{1}{\sqrt{\sec^2\alpha - 1}}$	$\sqrt{\csc^2\alpha - 1}$
Sec α	$\frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2\alpha}}$	$\frac{1}{\cos\alpha}$	$\sqrt{1 + \tan^2\alpha}$	$\frac{\sqrt{1 + \cot^2\alpha}}{\cot\alpha}$		$\frac{\csc\alpha}{\sqrt{\csc^2\alpha - 1}}$
Csc α	$\frac{1}{\text{sen}\,\alpha}$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{1 + \tan^2\alpha}}{\tan\alpha}$	$\sqrt{1 + \cot^2\alpha}$	$\frac{\text{Sec}\,\alpha}{\sqrt{\sec^2\alpha - 1}}$	

Comprobación de identidades trigonométricas.

Para comprobar una identidad trigonométrica se tienen varios métodos, el más común nos dice que en el primer miembro de la identidad se realizan todas las sustituciones y operaciones necesarias, sin efectuar cambios en el segundo miembro de la identidad hasta lograr la igualdad de ambos miembros.

Se recomienda sustituir lo más posible en función de seno y coseno.

Ejemplos:

1. *Demostrar que* $(1+\cot^2 x)\cos^2 x = \cot^2 x$

$(1+\cot^2 x)\cos^2 x = \cot^2 x$; pero $1+\cot^2 x = \csc^2 x$

$(\csc^2 x)\cos^2 x = \cot^2 x$; pero $\csc^2 x = \dfrac{1}{\text{Sen}^2 x}$

$\dfrac{1}{\text{Sen}^2 x}\cos^2 x = \cot^2 x$; Pero $\dfrac{\cos^2 x}{\text{Sen}^2 x} = \cot^2 x$

$\therefore$ $\boxed{\cot^2 x = \cot^2 x}$

2. *Demostrar que* $\csc a \cdot \sec a = \cot a + \tan a$

Identidades

$\csc a = \dfrac{1}{\text{Sen a}}$ $\quad \sec a = \dfrac{1}{\text{Cos a}}$ $\quad \cot a = \dfrac{\text{Cos a}}{\text{Sen a}}$ $\quad \tan a = \dfrac{\text{Sen a}}{\text{Cos a}}$

Sustitución

$$\frac{1}{\text{Sen a}} \cdot \frac{1}{\text{Cos a}} = \frac{\text{Cos a}}{\text{Sen a}} + \frac{\text{Sen a}}{\text{Cos a}}$$

$$\frac{1}{\text{Sen a}} \cdot \frac{1}{\text{Cos a}} = \frac{\text{Cos a Cos a} + \text{Sen a Sen a}}{\text{Sen a Cos a}}$$

$$\frac{1}{\text{Sen a}} \cdot \frac{1}{\text{Cos a}} = \frac{\text{Cos}^2\text{a} + \text{Sen}^2\text{a}}{\text{Sen a Cos a}}$$; pero $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$\boxed{\frac{1}{\text{Sen a}} \cdot \frac{1}{\text{Cos a}} = \frac{1}{\text{Cos a Sen a}}}$$

3. *Demostrar que* $Sec^4\, b\,(1-Sen^4\, b) -2\, Tan^2\, b = 1$

Multiplicando:

$Sec^4\, b - Sec^4\, b\, Sen^4\, b - 2\, Tan^2\, b = 1$

Factorizando el primer miembro y sustituyendo

$sec^4\, b = \dfrac{1}{Cos^4\, b}$ tenemos que

$$(Sec^2 b)^2 - \frac{1}{Cos^4\, b} Sen^4 b - 2tan^2 b = 1$$

Sustituyendo $sec^2\, b = tan^2\, b + 1$ y operando

$$(tan^2 b + 1)^2 - \frac{Sen^4\, b}{Cos^4\, b} - 2tan^2 b = 1$$

Desarrollando el binomio al cuadrado y sustituyendo $tan^4\, b = \dfrac{Sen^4\, b}{Cos^4\, b}$

$\cancel{tan^4\, b} \cancel{+ 2\, tan^2}\, b + 1 \cancel{- tan^4\, b} \cancel{- 2}\, tan^2\, b = 1$ $\boxed{1=1}$

Ejercicios:

Comprobar las siguientes identidades trigonométricas. (Coteja las respuestas con tu asesor)

A) $sen^2\, x = (1+cos\, x)\,(1-cos\, x)$

B) $\dfrac{sen\, x + cos\, x}{cos\, x} = tan\, x + 1$

C) $1-tan^2\, A = 2-sec^2\, A$

D) $\dfrac{1- sen\, A}{cos\, A} = \dfrac{cos\, A}{1+sen\, A}$

E) $sec\, x(1-sen^2\, x)= cos\, x$

F) $1-tan^4\, B= 2\, sec^2\, B - sec^4\, B$

G) $\dfrac{tan^2\, A - sec^2\, A}{cot^2\, A - cos^2\, A} = tan^2\, A$

H) $\cot^2 x - \cos^2 x = \dfrac{\cos^4 x}{\text{sen}^2 x}$

I) $\csc^4 A\,(1-\cos^4 A) - 2\cot^2 A = 1$

J) $\text{sen}^4 x = \dfrac{1-\cos^2 x}{\csc^2 x}$

2.3 Funciones trigonométricas de la suma y diferencia de los ángulos

Para sumar y restar los ángulos tenemos las siguientes formulas.

$\text{Sen}\,(a \pm b) = \text{Sen}\,a \cdot \text{Cos}\,b \pm \text{Sen}\,b \cdot \text{Cos}\,a$

$\text{Cos}\,(a \pm b) = \text{Cos}\,a \cdot \text{Cos}\,b \quad \text{Sen}\,a \cdot \text{Sen}\,b$

$\text{Tan}\,(a \pm b) = \dfrac{\text{Tan}\,a \pm \text{Tan}\,b}{1+\text{Tan}\,a \cdot \text{Tan}\,b}$

$\text{Cot}\,(a \pm b) = \dfrac{\text{Cot}\,a \cdot \text{Cot}\,b \quad 1}{\text{Cot}\,b \pm \text{Cot}\,a}$

$\text{Sec}\,(a \pm b) = \dfrac{1}{\text{Cos}\,(a \pm b)}$

$\text{Csc}\,(a \quad b) = \dfrac{1}{\text{Sen}\,(a \pm b)}$

2.4 Resolución de triángulos oblicuángulos

Se dice que un triángulo es oblicuángulo cuando no presenta un ángulo recto, pero si tiene un ángulo obtuso.

En cualquier triángulo siempre existe relación entre sus lados y ángulos, como podemos ver en el siguiente teorema: "En todo triángulo al ángulo mayor se opone el lado de mayor longitud; al ángulo menor se opone el lado de menor longitud; a ángulos iguales se oponen lados de igual longitud".

Cuando se habla de resolver un triángulo es porque se conocen tres de sus elementos, siendo necesario que uno de ellos sea la longitud de uno de sus lados.
Por lo tanto, los casos que pueden presentarse en la resolución son:

a) Conocer un lado y los ángulos adyacentes
b) Conocer dos lados y el ángulo comprendido
c) Conocer los tres lados
d) Conocer dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

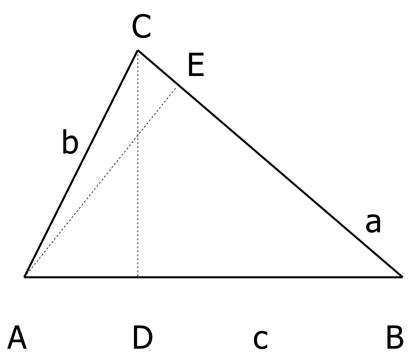
La relación de los triángulos oblicuángulos es posible al aplicar las leyes de los senos y cosenos.

- ***Ley de los Senos.***

"Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos".

1. Cuando el triángulo es acutángulo.

Sea un triángulo ABC



Se trazan las alturas CD y AE

en el $\triangle ACD$: $\text{sen } A = \dfrac{CD}{b}$

$\therefore$ $CD = b \text{ sen } A$ .... (1)

En el $\triangle BCD$: $\text{sen } B = \dfrac{CD}{a}$

$\therefore$ $CD = a \text{ Sen } B$ .... (2)

Igualando (1) y (2)

$bsen\ A = aSenB \therefore \dfrac{\text{a}}{\text{Sen a}} = \dfrac{\text{b}}{\text{Sen b}}$ .... (3)

En el $\triangle ACE$: $senC = \dfrac{\text{AE}}{\text{b}} \therefore AE = bsenC$ ....(4)

En el $\triangle ABE$: $senB = \dfrac{\text{AE}}{\text{c}} \therefore AE = csenB$ ....(5)

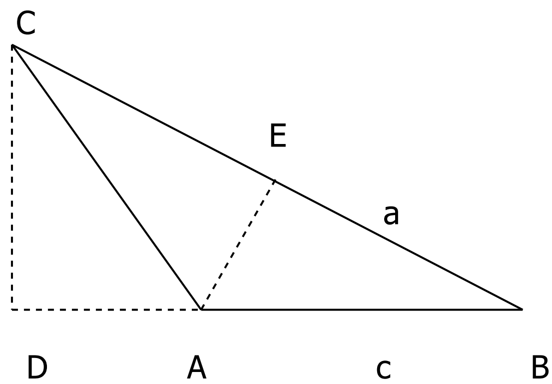
Igualando (4) y (5)

$bsen\ C = c\ SenB \therefore \dfrac{\text{b}}{\text{Sen B}} = \dfrac{\text{c}}{\text{Sen C}}$

$$\boxed{\frac{\text{b}}{\text{Sen B}} = \frac{\text{c}}{\text{Sen C}} = \frac{\text{a}}{\text{Sen A}}}$$

De (3) y (6), tenemos:

2. **Cuando el triángulo es oblicuángulo.**
   Sea el triángulo obtusángulo $\triangle ABC$:



Se trazan las alturas CD y AE

En el Δ CDB: Sen B = $\frac{CD}{a}$

$\therefore$ CD = a Sen B (1)

En el Δ CDA: Sen A: $\frac{CD}{b}$

$\therefore$ CD = b Sen A (2)

$a sen\, B = b Sen A \ \therefore \dfrac{a}{\text{Sen A}} = \dfrac{b}{\text{Sen b}}$ .... (3)

En el ΔACE: $senC = \dfrac{AC}{b} \therefore AC = bsenC$ ....(4)

En el ΔABE: $senB = \dfrac{AE}{c} \therefore AE = csenB$ ....(5)

Igualando (1) y (2)

Igualando (4) y (5), tenemos

$b sen\, C = c Sen B \qquad \therefore \dfrac{b}{\text{Sen B}} = \dfrac{c}{\text{Sen C}}$

Comparando (3) y (6)

Aplicación de la ley de los senos:

Para resolver un triángulo oblicuángulo aplicando la ley de los senos se necesita conocer:

1) Un lado y los ángulos adyacentes.
2) Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos

Ejemplos:

1. **Calcular los elementos de un triángulo oblicuángulo dado un lado y sus ángulos** adyacentes.

$A = 80°25'$ $\quad$ *Fórmulas* $\quad$ *Cálculo de C*

$B = 35°43'$ $\quad$ $A + B + C = 180°$ $\quad$ $C = 180° - (A + B)$

$c = 60$ $\quad$ $\dfrac{\text{a}}{\text{Sen A}} = \dfrac{\text{b}}{\text{Sen b}} = \dfrac{\text{c}}{\text{Sen C}}$ $\quad$ $C = 180° - (80°25' + 35°43')$

a=?

b=? $\quad$ $C = 180° - (116°8') = 63°52'$

Cálculo de a

$$\frac{\text{a}}{\text{Sen A}} = \frac{\text{c}}{\text{Sen C}} = \frac{\text{a}}{0.9860} = \frac{60}{0.8977}$$

$$\text{a} = \frac{60(0.9860)}{0.8977} = 65.90$$

$$\frac{\text{a}}{\text{Sen } 80°25'} = \frac{\text{c}}{\text{Sen}63°52'}$$

Cálculo de b

$$\frac{\text{b}}{\text{Sen B}} = \frac{\text{c}}{\text{Sen C}}$$

$$\text{b} = \frac{\text{c(SenB)}}{\text{SenC}}$$

$$\text{b} = \frac{60(\text{Sen}35°43')}{\text{Sen}63°52'} = \frac{60(0.5837)}{0.8977} = 39.01$$

2. **Calcular los elementos de un triángulo oblicuángulo si dos de sus lados miden: b = 57cm y c= 35cm y el ángulo B = 42º**

$A = ?$	$Fórmulas$	$Cálculo\ de\ C$
$B = 42°$	$A + B + C = 180°$	$\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{Sen\ B}} = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{Sen\ C}}$
a=?	$A + B + C = 180°$	$Sen\ C = \frac{\mathrm{c\ SenB}}{\mathrm{b}}$
b=57cm	$A = 180° - (B + C)$	$Sen\ C = \frac{35(\mathrm{Sen}(42°))}{57}$
c=35cm	$A = 180° - (42° + 24°15'34'')$	$Sen\ C = \frac{35(\mathrm{Sen}(0.669))}{57}$ = 0.4108
	$A = 113°44'26''$	$C = 24°15'34''$

Cálculo de a

$$\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{Sen\ A}} = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{Sen\ B}}$$

$$a = \frac{\mathrm{b(Sen(A))}}{\mathrm{SenB}}$$

$$a = \frac{57(\mathrm{Sen}(113°44'26''))}{\mathrm{Sen}42°}$$

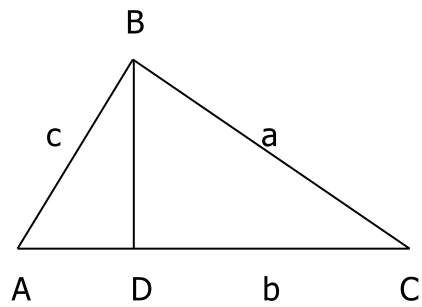
$$a = \frac{57(0.9453)}{0.6691} = 77.97cm$$

- **Ley de los Cosenos**

"El cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros lados, menos el duplo del producto de dichos lados por el coseno del ángulo que forman".

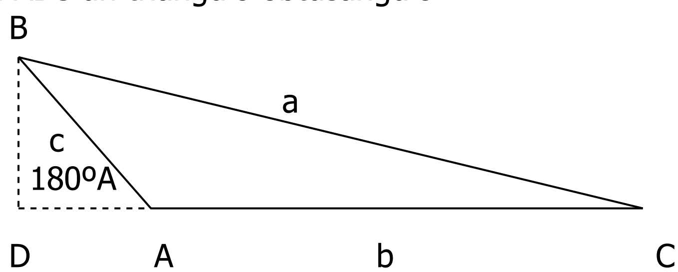
En la demostración tenemos dos casos:

1. **Cuando el triángulo es acutángulo**
   Sea ABC un triángulo acutángulo.



Se traza la altura BD. Por el teorema generalizando de Pitágoras:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

2. Cuando el triángulo es oblicuángulo.
   Sea ABC un triángulo obtusángulo.



Se traza la altura BD por el teorema de Pitágoras:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

Aplicaciones de la ley de los cosenos:

Para aplicar la ley de los cosenos es necesario conocer:

1) Los tres lados.
2) Dos lados y el ángulo comprendido

Ejemplos:

1. *Calcular los elementos de un triángulo oblicuángulo, sabiendo que sus lados miden: a=19cm, b=22cm y c=15cm.*

Datos

$a = 19cm$ | $Fórmulas$ | $Cálculo\ de\ A$

$b = 22cm$ | $Cos\ A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ | $Cos\ A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$c = 15cm$ | $Cos\ B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2bc}$ | $Cos\ A = \frac{22^2+15^2-19^2}{2(22)(15)}$

b=57cm | $Cos\ C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2bc}$ | $Cos\ A = \frac{484+225-361}{660}$

A=? | $Cos\ A = \frac{348}{660} = 0.5272$

B=? C = ?

Cálculo de B

$$Cos\ B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$Cos\ B = \frac{19^2+15^2-22^2}{2(19)(15)}$$

$$Cos\ B = \frac{361+225-484}{570}$$

$$Cos\ B = \frac{102}{570} = 0.1789$$

$B = 79°41'29''$

Cálculo de C

$$Cos\ C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$Cos\ C = \frac{19^2+22^2-15^2}{2(19)(22)}$$

$$Cos\ C = \frac{361+484-22}{836}$$

$$Cos\ C = \frac{620}{836} = 0.7416$$

$C = 42°7'47''$

2. *Calcular el triángulo oblicuángulo sabiendo que: A=58º, b=9cm y c=13cm*

Datos

$a = ?$	$Fórmulas$	$Cálculo\ de\ a$
$b = 9cm$	$a^2 = b^2 + c^2 - 2ac(CosA)$	$a^2 = b^2 + c^2 - 2ac(CosA)$
$c = 13cm$	$Cos\ B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2bc}$	$a^2 = \sqrt{9^2 + 13^2 - 2(9)(13)(Cos(58°))}$
$A = 58°$	$Cos\ C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2bc}$	$a^2 = \sqrt{81 + 169 - 234(0.5299)}$
$B = ?$		$a^2 = \sqrt{250 - 123.9966}$
$C = ?$		$a^2 = \sqrt{126.0034}$
		$a = 11.22cm$

Cálculo de B

$$Cos\ B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$Cos\ B = \frac{11.22^2+13^2-9^2}{2(11.22)(13)}$$

$$Cos\ B = \frac{125.89+169-81}{291.72}$$

$$Cos\ B = \frac{213.89}{291.72} = 0.7332$$

$$B = 42°50'40''$$

Cálculo de C

$$Cos\ C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$Cos\ C = \frac{11.22^2+9^2-13^2}{2(11.22)(9)}$$

$$Cos\ C = \frac{125.89+81-169}{201.96}$$

$$Cos\ C = \frac{37.89}{201.96} = 0.1876$$

$$C = 79°11'12''$$

Ejercicios:

1. Hallar los demás elementos de los siguientes triángulos oblicuángulos conocidos como:

A) a=22 cm	B) a=84 cm	C) a=14 m
B=10 cm	b=53 cm	b=15 m
C=17 cm	c= 62 cm	c=16 m

2. Hallar los demás elementos de los triángulos oblicuángulos, conocidos dos lados y el ángulo comprendido.

A) a=40 cm	B) b=25.61 cm	C) a=20 cm
B=70 cm	c=31.8 cm	c=13 cm
C=78º 22'	< A=37º 40'	< B=106º 58'

3. Hallar los demás elementos de los triángulos, conocidos un lado y los dos ángulos adyacentes.

A) < A= 80º	B)B=39º	C) < C= 14º 29'
< B= 35º	< C= 84º 39'	< A= 46º 51'
C= 12 m	a= 68.7 cm	b= 32 cm

4. Hallar los demás elementos de los triángulos, conocidos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

A) a= 50 cm	B) b= 11.36 m	C) a= 42 cm
B= 40 cm	c= 6.77 m	c= 83 cm
< A= 99	< C= 53º 40'	< C= 105º 30'

EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN

I.-Subrayar la respuesta correcta

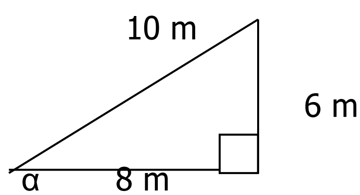
1. La razón entre el cateto opuesto al cateto adyacente

a) Seno   b) Tangente   c) Coseno

2. La razón entre el cateto adyacente a la hipotenusa

a) Seno   b) Tangente   c) Coseno

3. Sea un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 6m y 8m y su hipotenusa 10 m determinar las funciones trigonométricas del seno, coseno y tangente del ángulo señalado



a) sen α = 0.8   b) sen α = 0.6   c) sen α = 0.75
   cos α = 0.6   cos α = 0.8   cos α = 0.8
   tan α = 0.75   tan α = 0,75   tan α = 0.6

4. Si el sen C = 2/5, ¿ Cuál es el valor de la tangente?

a) tan C = $2/\sqrt{21}$ b) tan C = 2/21   c) tan C = 21/2

RESULTADOS DE AUTOEVALUACIÓN

1. **b**
2. **c**
3. **b**
4. **a**

BIBLIOGRAFIA:

- BALDOR, J. A, *Geometría Plana y del Espacio,* Publicaciones Culturales, México, 2008.
- ANFOSSI, AGUSTÍN, *Trigonometría Rectilínea,* Progreso, México, 1993.