# Guía de Estudios

# De Geometría

## INTRODUCCIÓN.

En este cuaderno de estudio se utiliza un lenguaje claro y preciso que propicie la generación de conocimientos que generalmente resultan difíciles de entender y aprender, ya que va de acuerdo a las nuevas y variadas formas metodológicas que favorecen el proceso de enseñanza-aprendizaje.

La didáctica utilizada en este cuaderno se fundamenta en la exposición de conceptos de introducción, motivos, ejemplos demostrativos, diferentes modelos de planteamiento de problemas, ejercicios que permitan llevar una evaluación continua.

El éxito de la enseñanza y del aprendizaje de las Matemáticas consiste en verlas como una disciplina que se interrelaciona con las otras materias y su aplicación con el medio cotidiano en que nos desenvolvemos.

El propósito de esta guía es entonces, facilitar el estudio de las Matemáticas para que el alumno logre una preparación y una enseñanza para toda su vida.

### OBJETIVO GENERAL

Que el alumno comprenda la utilidad de la Geometría en la
Resolución de problemas prácticos

## RECOMENDACIONES

El presente texto ha sido elaborado tomando en cuenta los diferentes aspectos que caracterizan el plan de estudios del Bachillerato no Escolarizado (abierto y a distancia).

Este texto ha sido estructurado de tal forma que facilite al máximo el aprovechamiento del alumno y que sea una fuente de información suficiente para el logro de los objetivos académicos que el sistema requiere.

Este material esta dividido en capítulos, cada uno de ellos contiene objetivos generales, vocabulario, ejercicios de autoevaluación y actividades de aprendizaje. Al final se incluye la bibliografía utilizada para la elaboración de este material y algunos textos sugeridos que pueden ser de gran utilidad al alumno si desea complementar sus estudios y ampliar su horizonte cultural.

Para la correcta utilización de este material es necesario tomar en cuenta los siguientes factores: Este libro es una recopilación de hechos históricos que contiene los elementos más importantes y significativos del plan de estudios del Bachillerato no escolarizado (Abierto y a Distancia); este material puede ser complementado por el alumno con otras lecturas sugeridas que le proporcione información adicional a la aquí presentada y que podrá ayudarlo a ampliar su conocimiento acerca del tema tratado.

## GEOMETRÍA

Es una rama de la matemática que se ocupa del estudio de las propiedades de las figuras en el plano o el espacio, incluyendo: puntos, rectas, planos, politopos (que incluyen paralelas, perpendiculares, curvas, superficies, polígonos, poliedros, etc.).

Es la base teórica de la geometría descriptiva o del dibujo técnico. También da fundamento a instrumentos como el compás, el teodolito, el pantógrafo o el sistema de posicionamiento global (en especial cuando se la considera en combinación con el análisis matemático y sobre todo con las ecuaciones diferenciales).

Sus orígenes se remontan a la solución de problemas concretos relativos a medidas. Tiene su aplicación práctica en física aplicada, mecánica, arquitectura, cartografía, astronomía, náutica, topografía, balística, etc. Y es útil en la preparación de diseños e incluso en la elaboración de artesanía.

### GLOSARIO

- **ÁNGULOS:** Es la abertura formada por dos semirrectas con un mismo origen llamado vértice.
- **VÉRTICE:** Es el punto de unión de dos semirrectas que forman un ángulo.
- **TEOREMA:** Es una proposición que puede ser demostrada. En el enunciado de un teorema se distinguen dos partes; la hipótesis, que es lo que se supone, y la tesis, que es lo que se quiere demostrar.
- **COROLARIO:** Es una proposición que se deduce de un teorema como consecuencia del mismo.
- **PROBLEMA:** Es una proposición en la que se pide construir una figura que reúna ciertas condiciones o bien, calcular el valor de alguna magnitud geométrica.
- **SUPERFICIE:** Son límites que separan a los cuerpos del espacio que los rodea.
- **SEMIRRECTA:** Si sobre una recta se señala un punto, la semirrecta es el conjunto de puntos formado por ese punto y todos los que le siguen.
- **SEGMENTO:** Si sobre la recta se señalan dos puntos, el segmento es el conjunto de puntos comprendidos entre esos dos puntos.
- **SECANTE:** Cuando una recta y la circunferencia tiene dos puntos comunes.
- **TANGENTE:** Cuando una recta y la circunferencia tienen un solo punto en común.

# Contenido

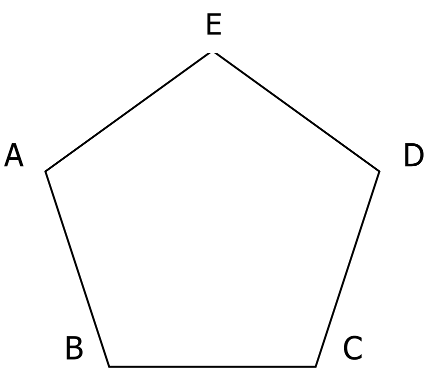

INTRODUCCIÓN.......... 2
OBJETIVO GENERAL .......... 2
RECOMENDACIONES.......... 3
GEOMETRÍA .......... 4
GLOSARIO .......... 4
1.1.1 Definición, notación y clasificación de polígono.......... 6
1.1.2 Clasificación de los polígonos.......... 6
1.1.3 Suma de ángulos interiores y exteriores de un polígono.......... 8
1.1.4 Suma de los ángulos exteriores de un polígono (Se)..........10
1.1.5 Triangulación de un polígono..........11
1.1.6 Cálculo de perímetros y áreas..........14
2 CÍRCULOS Y CIRCUNFERENCIA ..........24
2.1 Elementos ..........24
2.2 Ángulos..........29
2.3 Transformación de medidas angulares ..........31
3 SÓLIDOS..........35
3.1. Prisma..........35
3.2 Paralelepipedos..........36
3.3 Cilindro..........36
3.4 Cono..........37
3.5 Esfera ..........39

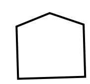
### 1.1.1 Definición, notación y clasificación de polígono

POLÍGONO: Etimológicamente "polígono” proviene de las raíces griegas "POLI"- muchos y "GONOS" - ángulos, por lo tanto, es un trazo que tiene muchos ángulos.

También se define como la figura plana limitada por una curva cerrada, llamada línea poligonal o contorno.

NOTACIÓN: Los polígonos se nombran mediante letras mayúsculas situadas en los vértices del mismo. Estas letras se escriben después de la palabra "polígono" o nombre específico del polígono o también por sus símbolos gráficos.




Notación
- Polígono
- Pentágono ABCDE
-  ABCDE

En un polígono se consideran:

**A)** LADOS: Segmentos que limitan los polígonos.

**B)** ANGULOS INTERNOS: Son los que se forman por dos lados consecutivos.

**C)** ANGULOS EXTERNOS: Son los que se forman por un lado y la prolongación del lado adyacente.

**D)** VÉRTICE: Son los extremos comunes de cada dos segmentos consecutivos, o sea, son los vértices de los ángulos internos del polígono.

**E)** DIAGONALES: Son las rectas que unen dos vértices no consecutivos del polígono.

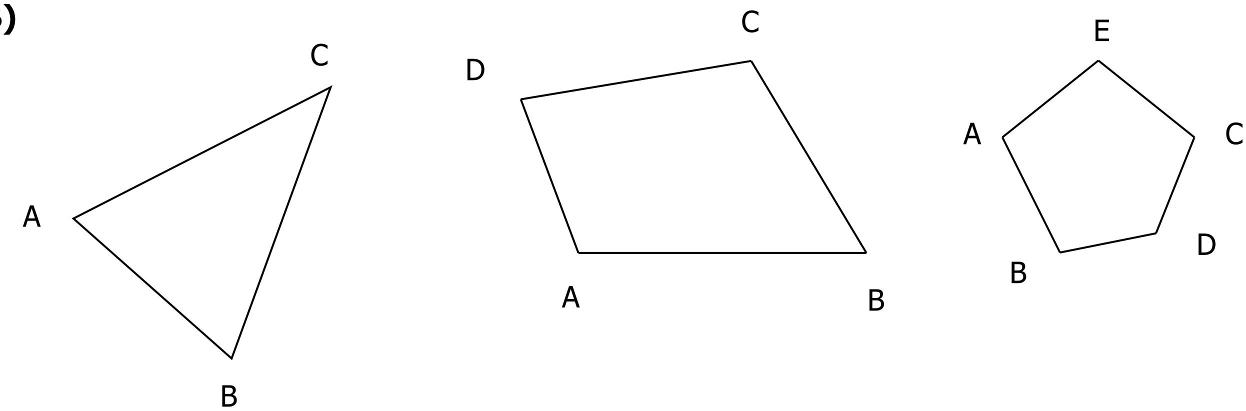
### 1.1.2 Clasificación de los polígonos

Existen tres diferentes clasificaciones de los polígonos que son:

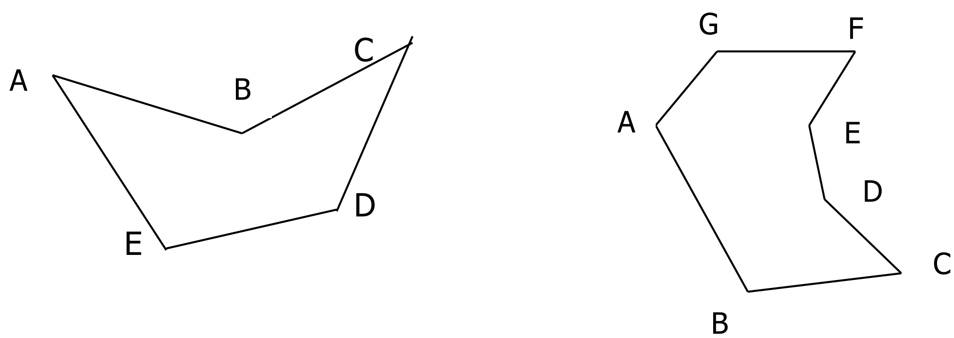
***SEGÚN EL CARÁCTER ENTRANTE O SALIENTE DE LOS ÁNGULOS DEL POLIGONO.***

**A) POLÍGONOS CONVEXOS:** Cuando todos sus ángulos son salientes, es decir, todos sus ángulos son menores a 180º.

**B)**

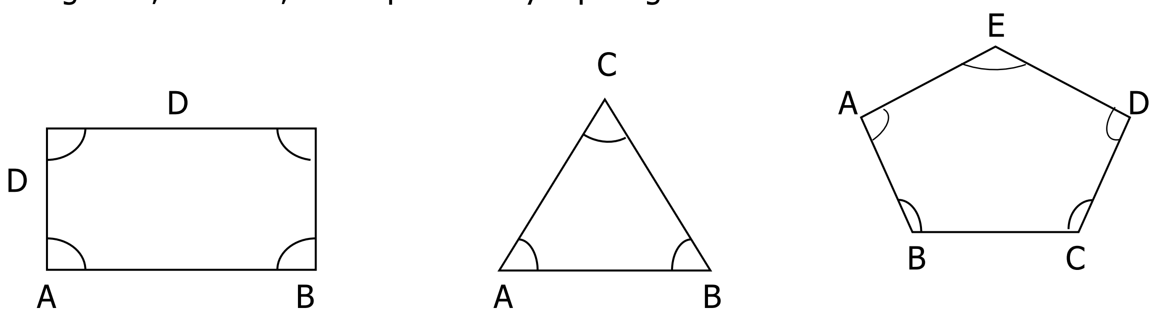



**C) POLIGONOS CÓNCAVOS:** Cuando alguno de sus ángulos es entrante, es decir, uno o más de sus ángulos internos son mayores a 180º.



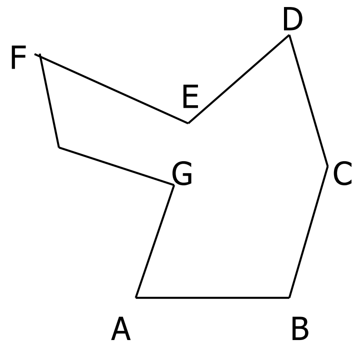

***SEGÚN LA REGULARIDAD DE SUS ELEMENTOS.***

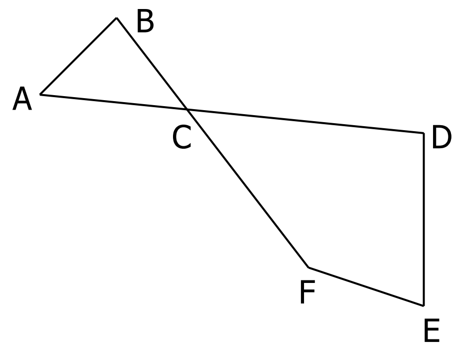
**A) POLÍGONOS REGULARES:** Son polígonos que tienen todos sus lados y ángulos iguales, es decir, son equiláteros y equiángulos.




AB = BC= CD = DA AB = BC = CA AB =BC = CD = DE = EA

**B) POLÍGONOS IRREGULARES:** Son polígonos que no tienen sus lados y ángulos iguales.




***SEGÚN EL NÚMERO DE SUS LADOS:***

| *Nombre del Polígono* | *Número de Lados* |
|---|---|
| Triángulo | 3 |
| Cuadrilátero | 4 |
| Pentágono | 5 |
| Hexágono | 6 |
| Heptágono | 7 |
| Octágono | 8 |
| Eneágono | 9 |
| Decágono | 10 |
| Endecágono | 11 |
| Dodecágono | 12 |

Más de 12 lados, al polígono se le llama de "n" lados.

### 1.1.3 Suma de ángulos interiores y exteriores de un polígono

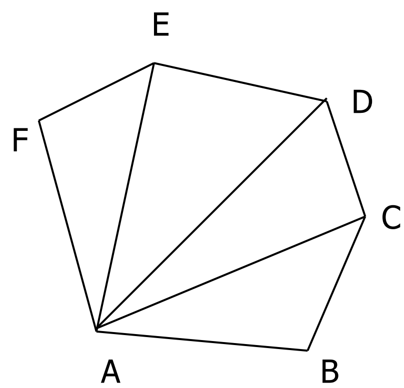
- *SUMA DE LOS ÁNGULOS INTERIORES ($S_i$ )*

TEOREMA: La suma de los ángulos interiores de un polígono convexo es igual a tantas veces dos ángulos rectos, como lados menos dos tiene el polígono.

| HIPÓTESIS | TESIS |
|---|---|
| < A, < B,< C… | Si < A+ < B+…2R(n-2) |

son los ángulos interiores de un polígono convexo de n lados.

CONSTRUCCIÓN AUXILIAR.
Desde un vértice cualquiera se trazan las diagonales.
El polígono queda descompuesto en n -2 triángulos.




**Demostración:**

1. La suma de los ángulos interiores de n-2 triángulos es igual a los ángulos interiores del polígono.

2. La suma de los ángulos interiores de cada triángulo es igual a dos rectos es decir 2R.
   Como el número de triángulos en que se descompone el polígono es n-2.

3. Si = 2R (n-2)

Aplicando la fórmula en la figura:
Si = 2R (6-2)
= 2R (4)
= 8R

Donde
Si = suma de ángulos interiores
R = radio

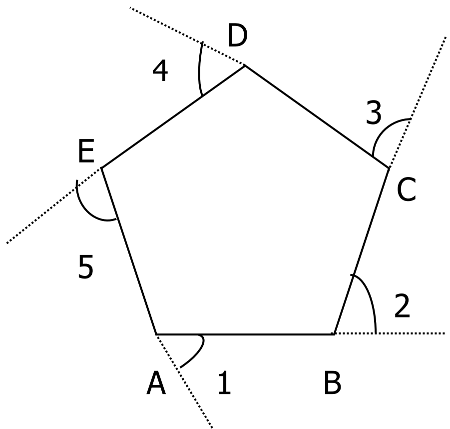
Valor de un ángulo interior de un polígono regular.
Como el polígono regular tiene todos sus ángulos interiores iguales, el valor, "i" se encuentra dividiendo la suma entre el número "n" de ángulos.

$i = \frac{Si}{n}$ pero como Si = 2R (n-2), nos queda

$$i = \frac{2R(n-2)}{n}$$

## 1.1.4 Suma de los ángulos exteriores de un polígono (Se)

TEOREMA: La suma de los ángulos exteriores (Se) de un polígono convexo es igual a cuatro ángulos rectos.




| HIPOTESIS | TESIS |
|---|---|
| < 1,< 2.... Son ángulos externos de un polígono convexo de n lados. | Se =1+2+. =4R<br>Donde<br>Se = suma de ángulos exteriores.<br>R = radio |

**Demostración:**
El ángulo exterior y el ángulo interior en cada vértice suman dos rectos (por ser adyacentes).

Si este valor se multiplica por "n" vértices, se tiene la suma de todos los ángulos interiores más la suma de todos los ángulos exteriores, o sea:

$S_i + S_e = 2R \cdot n$
De donde Se = 2Rn-Si ; pero como
Si = 2R(n-2), entonces
$S_e = 2Rn - 2R(n-2)$
$S_e = \cancel{2Rn} - \cancel{2Rn} + 4R \therefore Se = 4R$

Valor de un ángulo exterior de un polígono regular. Como los ángulos interiores de un polígono regular son iguales, los exteriores también serán iguales. Para encontrar el valor de "e" de un ángulo exterior, se divide la suma de todos ellos entre el número de ángulos que existen:

$e = \frac{Se}{n}$ ; pero como Se = 4R, tenemos que

$$e = \frac{4R}{n}$$

## 1.1.5 Triangulación de un polígono

Triangulación de un polígono significa trazar sus diagonales para determinar cuántos triángulos lo dividen; se busca la relación con el triángulo, ya que es el polígono que tiene menos lados y que sus ángulos interiores suman dos rectos (180º).

TEOREMA: El número de diagonales que se pueden trazar desde un vértice es igual al número de lados del polígono menos tres.

HIPÓTESIS TESIS

ABC… es un polígono de d = n-3 ABC….. es un polígono de n lados
n lados; d = número
d= número de diagonales desde un vértice

**Demostración:**

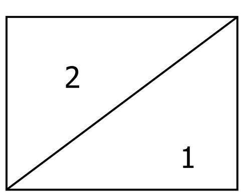
Si desde un vértice cualquiera se trazan todas las diagonales posibles, siempre habrá tres vértices a los que no se les puede trazar diagonal: el vértice desde donde parten las diagonales y los vértices contiguos. Como el número de vértices es igual al número de lados, tenemos que:

$$d = n - 3$$

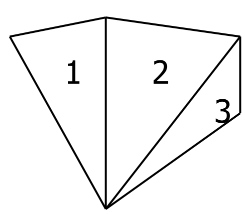
La relación que existe entre el número de lados y los triángulos que se forman por sus diagonales en un polígono es:

Número de triángulos de un polígono es igual al número de lados disminuidos en dos unidades.

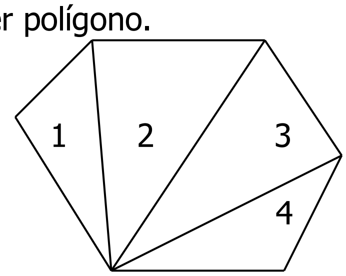
Triángulos = lados - 2
$\Delta = n - 2$ donde n es el número de lados de cualquier polígono.




4 Lados
2 Triángulos




5 Lados
3 Triángulos




6 Lados
4 Triángulos

**Ejemplos:**

*1. - Hallar la suma de los ángulos interiores de un cuadrado.*

DATOS
n= 4
Si =?

FORMULA
Si = 2R (n-2)

SUSTITUCIÓN
Si = 2(90º) (4-2)
Si = 180 (2)
Si = 360º

*2. - ¿Cuál es el polígono cuya suma de ángulos interiores es de 1260º?*

DATOS
Si = 1260º
n =?

FORMULA

$$n-2=\frac{Si}{2R}$$

$$n=\frac{Si}{2R}+2$$

SUSTITUCIÓN

$$n=\frac{1260}{2(90°)}+2$$

$$n=\frac{1260°}{180°}+2 = 7 + 2 = 9$$

Eneágono

*3. - Hallar el valor de un ángulo interior de un hexágono regular.*

DATOS
n=6
i=?

FORMULA

$$i=\frac{2R(n-2)}{n}$$

SUSTITUCIÓN

$$i=\frac{2(90°)(6-2)}{6}$$

$$i=\frac{180°(4)}{6}$$

$$i=\frac{720°}{6} = 120°$$

*4. - ¿Cuál es el polígono regular cuyo ángulo inferior vale 135º?*

DATOS
i=135º
n=?

FORMULA

$$i=\frac{2R(n-2)}{n}$$

$$in = 2R(n-360°)$$

$$2Rn-ni=360°$$

$$n(2R-i)=360°$$

$$n=\frac{360°}{2(R)-i}$$

SUSTITUCIÓN

$$n=\frac{360°}{2(90°)-135°}$$

$$n=\frac{360°}{180°-135°} = 8$$

$$n = Octagono$$

5. *- ¿Cuánto suman los ángulos exteriores de un heptágono?*

| DATOS | FORMULA | SUSTITUCIÓN |
|---|---|---|
| Se =? | Se = 4R | Se = 4(90º) |
| n=7 | | Se = 360º |

6. *- Hallar el valor de un ángulo exterior de un decágono*

| DATOS | FORMULA | SUSTITUCIÓN |
|---|---|---|
| n =10 | $e = \frac{Se}{n}$ | $e = \frac{360°}{10}$ |
| Se =360º | | |
| | | e= 36º |

7. - *¿Cuántas diagonales se pueden trazar desde el vértice de un octágono?*

| DATOS | FORMULA | SUSTITUCIÓN |
|---|---|---|
| n= 8 | d= n-3 | d= 8-3 |
| d= ? | | d= 5 diagonales |

**Ejercicios:**

1. *Hallar la suma de los ángulos internos de los siguientes polígonos*

a) Triángulo  b) Trece lados  c) Heptágono  d) 17 lados  e) Decágono

2. *Cuáles son los polígonos regulares cuya suma de ángulos interiores es:*

a) 720º  b) 70 20º  c) 1800º  d)1980º  e) 880º

3. *Hallar el valor de un ángulo interior de los siguientes polígonos regulares:*

a) 18 lados  b) Pentágon  c) Octágono  d)30 lados  e) Dodecágono

4. *Cuál es el polígono regular cuyo ángulo interior mide:*

a)120º  b)108º  c)165º  d)60º  e)157.5º

5. *La suma de los ángulos interiores de un polígono es igual a cuatro veces la suma de los ángulos exteriores de dicho polígono regular, ¿de qué polígono se trata?*

6. *Hallar el valor de un ángulo exterior de los siguientes polígonos regulares*

a)9 lados  b)11 lados  c)21 lados  d)32 lados  e)17 lados

7. *Cuántas diagonales se pueden trazar desde un vértice en los siguientes polígonos*

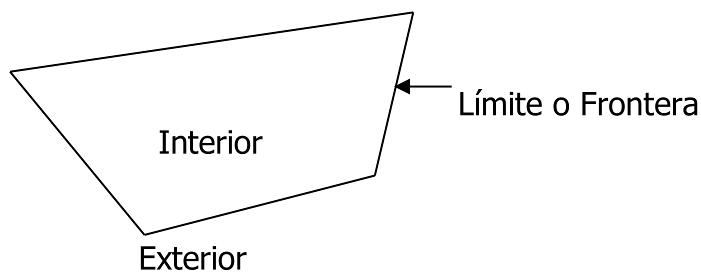
a) Un decágono  b) Pentadecágono c) Octágono  d) Heptágono  e) Triángulo

8. *Cuál es el polígono regular cuyo ángulo exterior es de:*

a)90º  b)150º  c)75º  d)45º  e)135º

### 1.1.6 Cálculo de perímetros y áreas

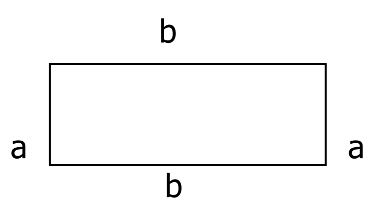
Un polígono es una figura que divide al plano en tres regiones:
Interior, exterior y límite o frontera.




PERÍMETRO: Es la medida del límite o frontera de un polígono; se obtiene sumando la longitud de todos sus lados o desarrollando la fórmula correspondiente.
Obtención de fórmulas de perímetros y áreas de polígonos.

- **Perímetro y área del cuadrilongo.**

El perímetro se obtiene mediante la suma de sus cuatro lados.




P= a+b+a+b
P= 2 a +2 b
P= 2 (a+b)

El área se obtiene multiplicando la base por la altura o el lado por el ancho.

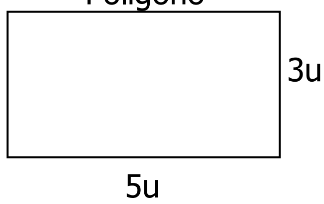
$$A = bh$$

donde
A = área
b = base
h = altura

**EJEMPLO:**

Obtener el perímetro y el área de un cuadrilongo de 5u de base y 3u de altura.

Polígono




FÓRMULAS

$P= 2\ (a+b)$

$A=bh$

ECUACIONES

$P=2(3u+5u)$

$P=2(8u)$

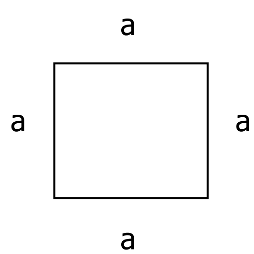
$\boxed{P=16u}$

$A=(5u)(3u)$

$\boxed{A= 15u^2}$

- **Perímetro y área del cuadrado**

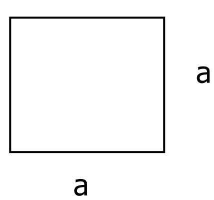
El perímetro se obtiene sumando sus cuatro lados.




$P= a+a+a+a$

$P= 4a$

El área se obtiene multiplicando la base por la altura




$A= b\ a$ como el cuadrado tiene sus lados iguales $b= a$

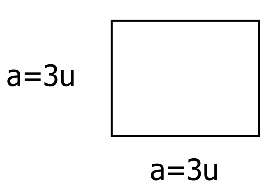
$A= a \cdot a$

$A= a^2$

**Ejemplo:**

Obtener el perímetro y el área de un Cuadrado de 3u de lado

Polígono




FÓRMULAS

$P= 4\ a$

$A= a^2$

ECUACIONES

$P= 4(3u)$

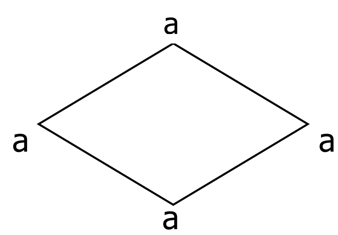
$\boxed{P = 12u}$

$A= (3u)^2$

$\boxed{A = 9u^2}$

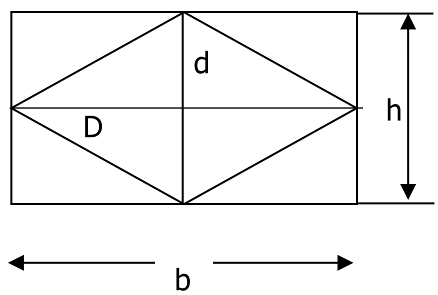
- **Perímetro y Área del Rombo.**

El perímetro se obtiene sumando sus cuatro lados.




P= a+a+a+a
P= 4a

El Área: Dado un rombo con diagonal mayor D y diagonal menor d, inscrito en un cuadrilongo de base b y altura h, se observa que D= b y d= h



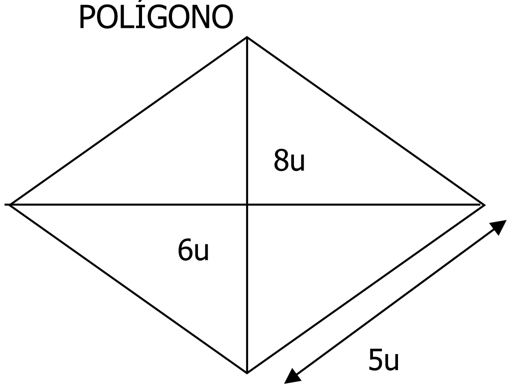

El área del cuadrilongo es: A= bh
Si se sustituye A= Dd.
Como el rombo es la mitad del cuadrilongo,

$$A = \frac{Dd}{2}$$

**Ejemplo:**

Obtener el perímetro y el área de un rombo que mide 5u de lado, 8u en su diagonal mayor y 6 unidades en su diagonal menor.

POLÍGONO




FÓRMULAS

P= 4 a

$$\boxed{A = \frac{Dd}{2}}$$

ECUACIONES

P= 4(5u)

P= 20u

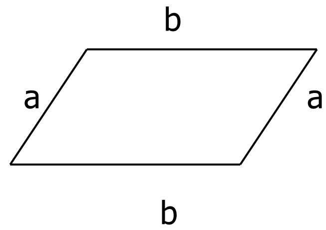
$$A= \frac{(8)(6)}{2}$$

A= $48u^2/2$

$$\boxed{A= 24\ u^2}$$

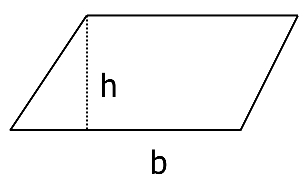
- **Perímetro y Área del Romboide**

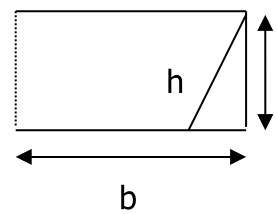
El perímetro se obtiene sumando sus cuatro lados.




$P= a+b+a+b$
$P= 2a + 2b$
$P= 2\,(a+b)$

Para obtener el área, dado un romboide de base b y altura h, el triángulo que se forma del lado izquierdo de la altura h se traslada y superpone del lado derecho. Al hacer la superposición, el área del romboide es equivalente a la del cuadrilongo con la misma base y la misma altura.

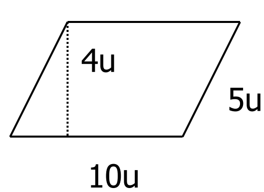



$A= bh$

**Ejemplo:**
Calcular el perímetro y el área de un romboide que mide 10u de base, 4u de altura y 5u en su lado menor.

POLÍGONO



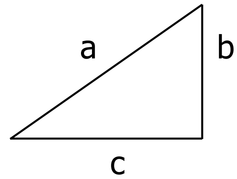

FÓRMULAS
$P= 2(a+b)$
$A= bh$

SUSTITUCIÓN
$P= 2(5u+10u)$
$P= 2(15u)$
$P= 30u$

$A=(10u)(4u)$
$A= 40u^2$

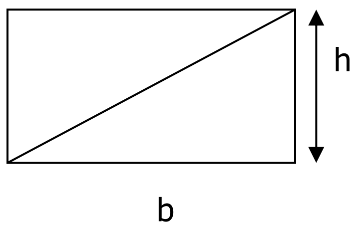
- **Perímetro y Área del Triángulo**

El perímetro se obtiene sumando sus tres lados.




$P= a+b+c$

El área se calcula a partir de un cuadrilongo de base b y altura h, y al trazar su diagonal que divide al cuadrilongo en dos triángulos iguales.

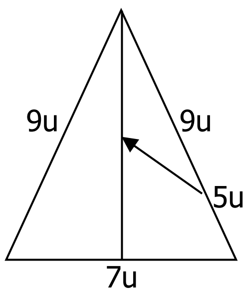



El área de uno de los triángulos es la mitad del área del paralelogramo.

$$A = \frac{bh}{2}$$

**Ejemplo:** Calcular el perímetro y el área de un triángulo isósceles que mide 7u de base, 5u de altura y 9u en cada uno de sus lados iguales.

POLÍGONO




FÓRMULAS

P= a+b+c

$$A = \frac{bh}{2}$$

ECUACIONES

P= 9u+ 9u+ 7u

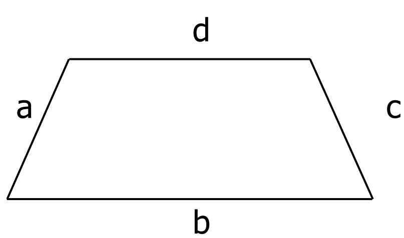
$\boxed{P= 25u}$

$$A = \frac{(7u)(5u)}{2}$$

$$A = \frac{(35u^2)}{2}$$

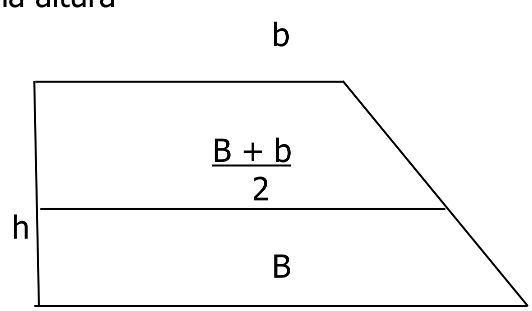
$$A = 17.5u^2$$

- **Perímetro y Área del Trapecio.** El perímetro se obtiene sumando sus cuatro lados.

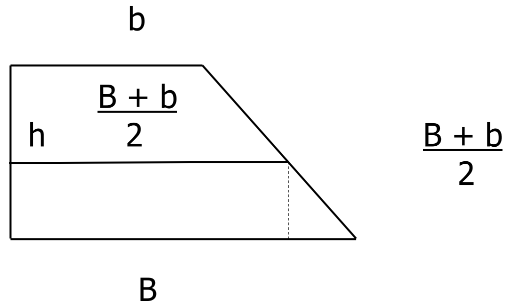



P= a +b +c +d

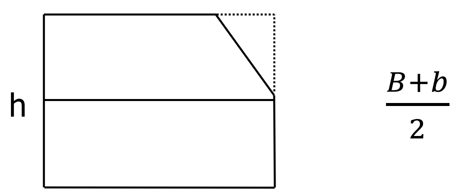
El área se calcula a partir de un trapecio rectangular de base mayor B, base menor b y una altura h, se traza la base media: $\frac{B+b}{2}$ que lo divide en 2 trapecios y se multiplica por la altura



A este trapecio se le traza una paralela a la altura h, a partir de la base media, quedando un triángulo en el lado derecho.



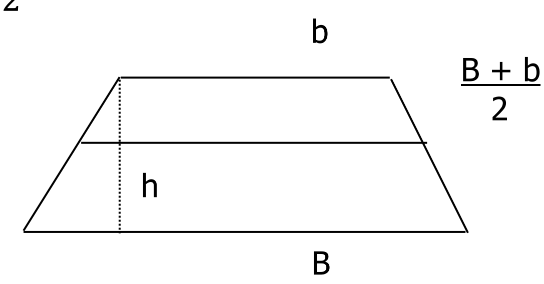

Este triángulo se traslada y se superpone en el trapecio de arriba, de modo que el trapecio original se transforma en un cuadrilongo de base $\frac{B+b}{2}$ con la misma altura h



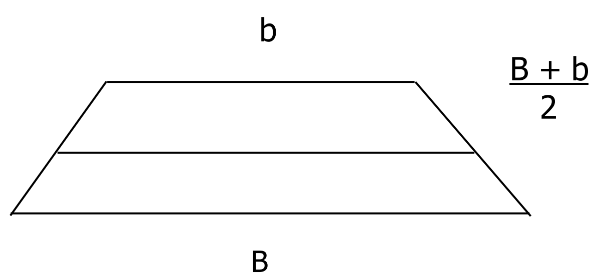

Por tanto, el área de cualquier trapecio rectangular, se obtiene con la fórmula:

$$A = \left(\frac{B+b}{2}\right) \cdot \mathrm{h}$$

Dado un trapecio no rectangular de base mayor B, base menor b y altura h, se traza la base media $\frac{B+b}{2}$, que lo divide en dos trapecios.




Enseguida a partir de la base media, se trazan paralelas a la altura, quedando un triángulo del lado izquierdo y otro del lado derecho.



Estos triángulos se trasladan y se superponen en el trapecio de arriba, de modo que el trapecio original se transforma en un cuadrilongo de base $\frac{B+b}{2}$ y altura h.

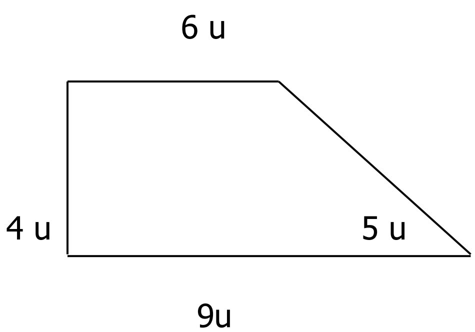
$\frac{B+b}{2}$

Por lo que el área de cualquier trapecio se obtiene con la fórmula:

$$A = \left(\frac{B+b}{2}\right) \cdot h$$

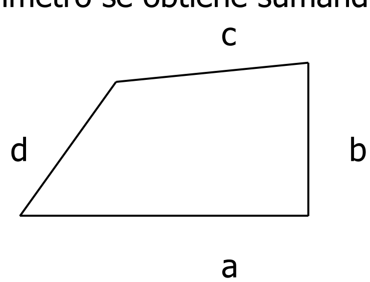
**Ejemplo:**

Calcular el perímetro y el área de un trapecio rectangular que mide 9u de base mayor, 6u de base menor, 5u en su cuarto lado y 4u de altura.

| POLIGONO | FORMULAS | ECUACIONES |
|---|---|---|
| | P= a+ b+ c+ d | P= 4u+ 6u+ 5u+ 9u |
| | $A = \left(\frac{B+b}{2}\right) \cdot h$ | $\boxed{P= 24\ u}$ |
|   | | $A = \left(\frac{B+b}{2}\right) \cdot h$ |
| | | $A = \left(\frac{9u+6u}{2}\right) \cdot 4u$ |
| | | $A = \left(\frac{15u}{2}\right) \cdot 4u$ |
| | | A= (7.5u) 4u |
| | | A= 30u$^2$ |

- **Perímetro y Área del Trapezoide.**

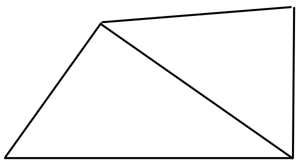
El perímetro se obtiene sumando sus cuatro lados.




P= a+ b+ c+ d

El área de un trapezoide se calcula trazando su diagonal, obteniendo así dos triángulos.

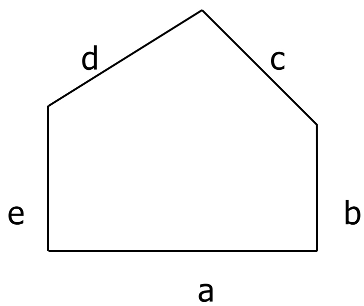
Esto significa que el área del trapezoide será igual a la suma de las áreas de los dos triángulos.



$A = A_1 + A_2$

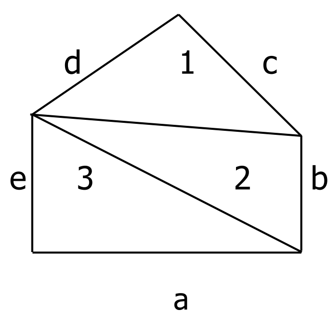
- **Perímetro y Área de un Polígono Irregular.**

El perímetro se obtiene sumando todos sus lados.




$P = a + b + c + d + e + \ldots$

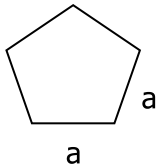
El área se calcula trazando sus diagonales, obteniendo así varios triángulos. De aquí se desprende que el área de un polígono irregular es equivalente a la suma de las áreas de los triángulos que resulten.




$A = A_1 + A_2 + A_3 \ \ldots$

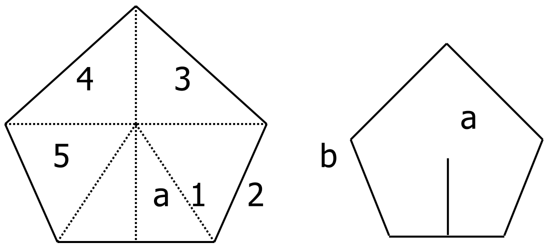
- **Perímetro y Área de un Polígono Regular**

El perímetro se obtiene sumando todos sus lados.




$P = a+a+a+a+a$
Pentágono: $P = 5\,a$
Hexágono: $P = 6\,a$
Octágono: $P=8a$ ; $P= na$

El área se calcula, dado un polígono regular de lado b y apotema a, al unir su centro con cada uno de sus vértices, se divide en triángulos iguales.




Esto significa que el área sería igual a la suma de las áreas de sus triángulos iguales.

$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \ldots$

Pero como la apotema del polígono es igual a la altura de cada triángulo y cada uno de los lados es igual a cada una de las bases de los triángulos, tenemos que:

$$A = \frac{ba}{2} + \frac{ba}{2} + \frac{ba}{2} + \ldots\ldots$$

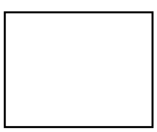
Y además el perímetro del polígono regular es igual a la suma de todas las bases de los triángulos, el área será entonces:

$$A = \frac{Pa}{2}$$

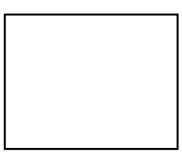
**Ejercicios:**

**1. Obtén el perímetro de cada uno de los polígonos que se indican.**

| POLÍGONOS | FÓRMULAS | OPERACIONES |
|---|---|---|

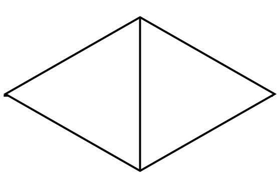


a= 9.25 m

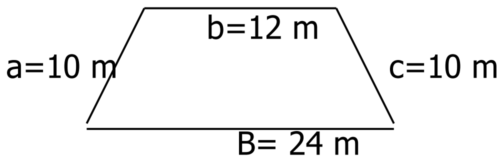


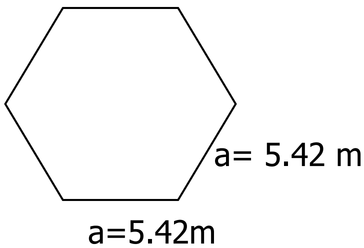
a= 2.15 m

b = 3.75 m



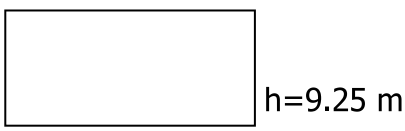
a = 6.14 m

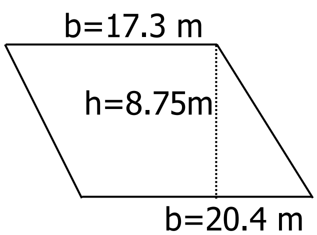


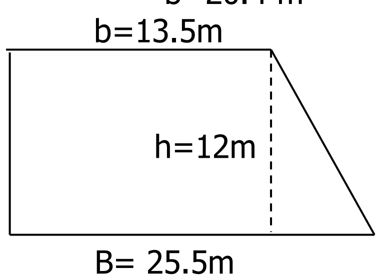



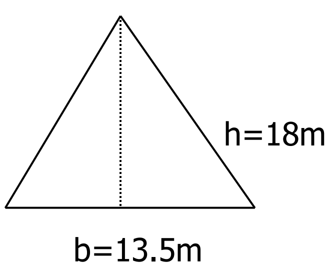

**2. Obtén las áreas de los polígonos que se indican.**

| POLÍGONOS | FÓRMULAS | OPERACIONES |
|---|---|---|



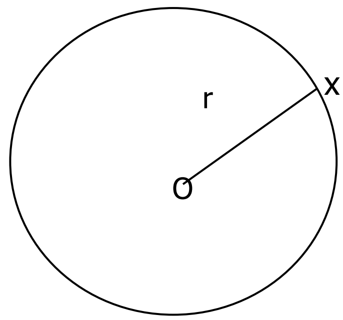



# 2 CÍRCULOS Y CIRCUNFERENCIA

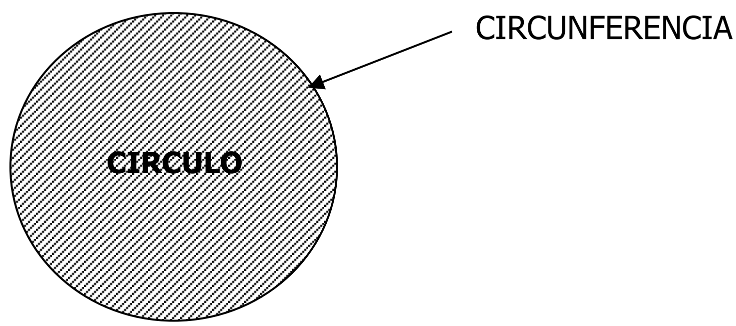
Definición de Circunferencia: Es una curva plana y cerrada, cuyos puntos equidistan de un punto interior llamado centro.

El centro de la circunferencia se representa por el punto O; el segmento r que es la distancia del centro a cada uno de los puntos de la circunferencia se llama radio.




O = centro de la circunferencia
OX = r radio de la circunferencia

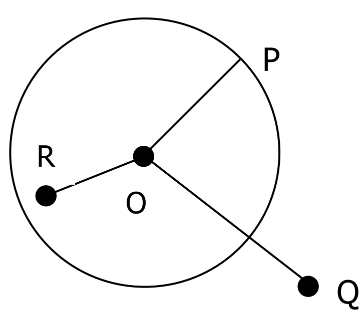
**Definición de Círculo:** Es la porción interior del plano separado por la circunferencia, que sirve de límite o frontera con la región exterior.




## 2.1 Elementos

- ***Puntos Interiores y Exteriores de la Circunferencia.***

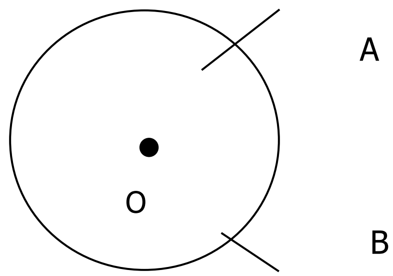
La Circunferencia Divide al Plano en Dos Regiones: Una exterior y otra interior. Los puntos que se ubican a distancias menores que el radio, se llaman PUNTOS INTERIORES y están contenidos en el círculo. Los puntos que se ubican a distancias mayores que el radio se les llama PUNTOS EXTERIORES.




OP = radio de la circunferencia
OR < r ∴ R es un punto interior
OQ > r ∴ Q es un punto exterior

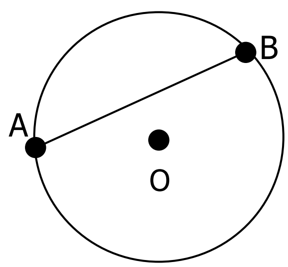
**NOTACIÓN:** Una circunferencia o un círculo se denota por las letras del centro O y del radio r escritas en la forma c (O,r).

**ARCO:** Es una porción de circunferencia determinada por dos de sus puntos llamados extremos del arco.




AB = arco de la circunferencia

**CUERDA:** Es el segmento que está limitado por dos puntos de la circunferencia; una cuerda subtiende al arco que termina en sus extremos. De los dos arcos que determina una cuerda en la circunferencia, al menor se le llama arco correspondiente a la cuerda.



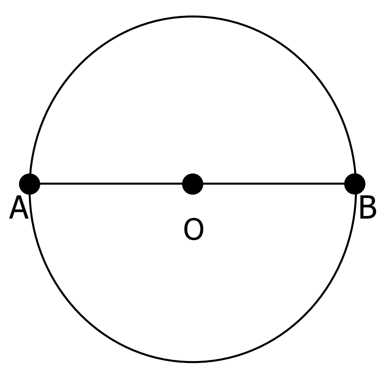

AB = cuerda de la circunferencia

AB < BA

$\therefore$ AB = arco correspondiente a la cuerda

**DIÁMETRO:** Es el segmento que une dos puntos de la circunferencia y que pasa por su centro. El diámetro es la cuerda de mayor longitud que se puede trazar en la circunferencia; los arcos que se forman son iguales.

*El diámetro es igual a la suma de dos radios.*



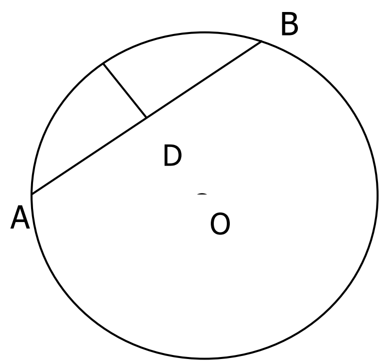

AB = diámetro de la circunferencia

OA y OB = radios de la circunferencia

$\therefore$ AB = OA + OB

AB = BA

**FLECHA O SÁGITA:** Es la perpendicular de la parte de un radio que va del punto medio de una cuerda al arco suspendido por ella.




AB = cuerda

AB = arco de la circunferencia

D = $\frac{AB}{2}$ punto medio de la cuerda

$DC \perp AB$

$\therefore DC$ = flecha o sagita

**Ejercicios:**

Contesta las Siguientes Preguntas: (coteja las respuestas con tu asesor)

1. Explica la diferencia entre la circunferencia y el círculo.

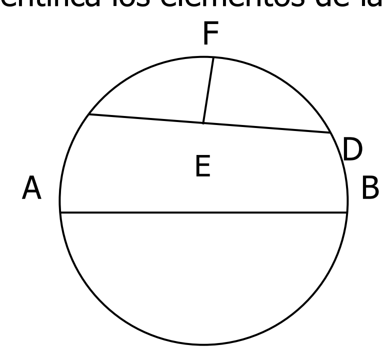
2. ¿Qué son los puntos interiores y exteriores de la circunferencia?

3. Nombra los elementos del círculo.

4. ¿Qué es el arco de la circunferencia?

5. Explica la diferencia entre el radio y el diámetro de la circunferencia.

6. Identifica los elementos de la circunferencia en la siguiente figura.



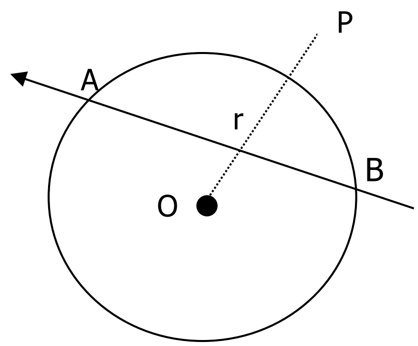

7. Gráfica un punto exterior y un punto interior en una circunferencia.

**POSICIONES RELATIVAS DE UNA RECTA Y UNA CIRCUNFERENCIA**

**A) SECANTE:** Cuando la recta y la circunferencia tiene dos puntos comunes, la distancia de la recta al centro de la circunferencia es menor que su radio.

Sea la recta llamada secante A y B puntos comunes de la recta y la circunferencia.

OP distancia del centro a la recta $\therefore$ OP $<$ r

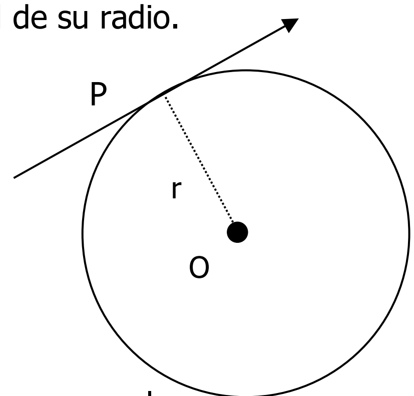



**B) TANGENTE:** Cuando la recta y la circunferencia tienen un solo punto en común. La distancia entre la recta y el centro de la circunferencia es igual a la longitud de su radio.

Sea la recta llamada tangente

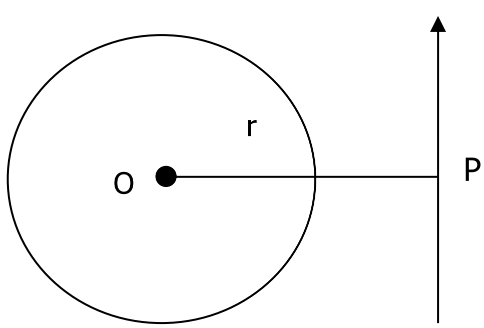
P= el punto común de la tangente y la circunferencia.

OP = distancia del centro a la recta $\therefore$ OP = r



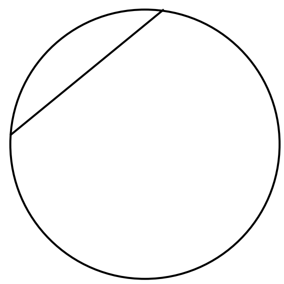

**C) EXTERIOR:** Cuando la recta y la circunferencia tienen un solo punto en común. La distancia de la recta al centro es mayor que la longitud del radio.
Sea la recta llamada exterior.

OP = distancia del centro a la recta $\therefore$ OP $>$ r

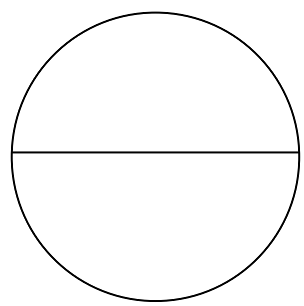


## FIGURAS EN EL CÍRCULO

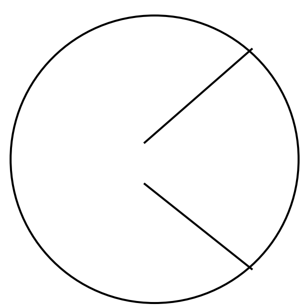
**A) SEGMENTO CIRCULAR:** Es la parte del círculo limitado por una cuerda y su arco.



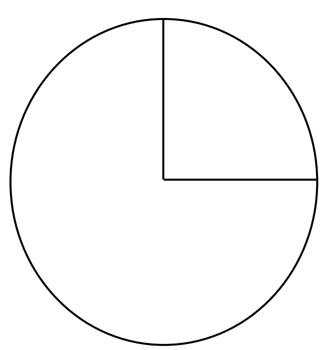
**B) SEMICÍRCULO:** Es la parte del círculo limitada por un diámetro y su arco de circunferencia



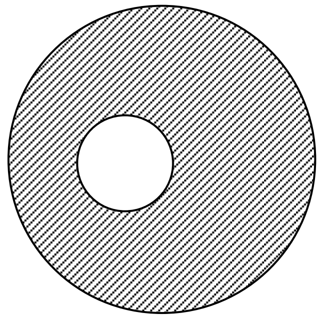
**C) SECTOR CIRCULAR:** Es la parte del círculo limitada por dos radios y su arco.



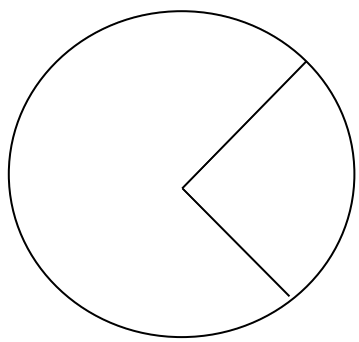
**D) CUADRANTE CIRCULAR:** Es la parte circular determinada por dos radios que forman un ángulo recto (90º).



**E) CORONA CIRCULAR:** Es el espacio del círculo que se forma por dos circunferencias concéntricas.

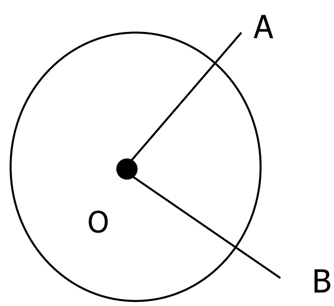


**F) TRAPECIO CIRCULAR:** Es la porción de "corona" limitada por dos radios.

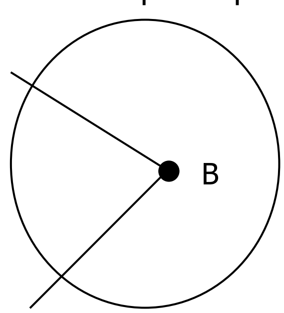


## 2.2 Ángulos

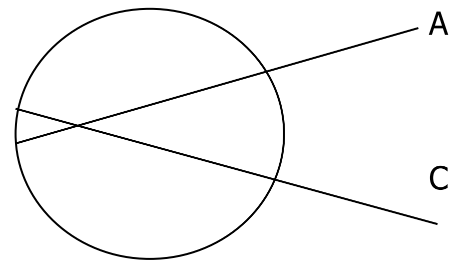
**ÁNGULO CENTRAL:** Es el ángulo trazado en el círculo y cuyo vértice coincide con su centro.



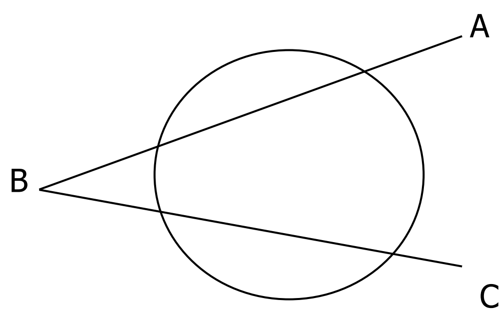

**ÁNGULO INSCRITO:** Es el ángulo cuyo vértice coincide con cualquiera de los puntos de la circunferencia y sus lados pasan por dos puntos de la misma.

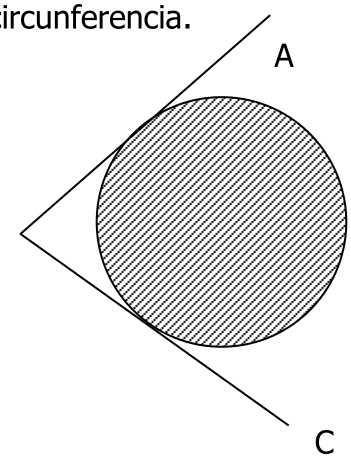


**ÁNGULO EXCÉNTRICO:** Es el ángulo cuyo vértice está adentro del círculo, pero no coincide con el centro.




**ÁNGULO EXTERIOR:** Es el ángulo cuyo vértice está en el exterior del círculo, pero sus lados son secantes o tangentes a la circunferencia.

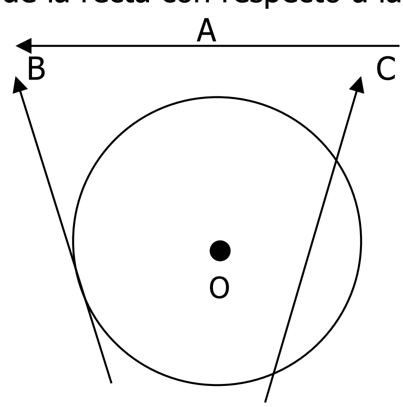



**Ejercicios:**

1. ¿Qué es la secante en una circunferencia?

2. Identifica la posición de la recta con respecto a la circunferencia en la siguiente figura




3. Cita las principales figuras en el círculo

4.-¿Qué ángulos se pueden trazar en un círculo?

5. ¿Qué es un ángulo inscrito?

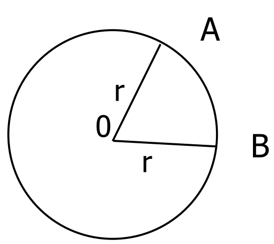
## 2.3 Transformación de medidas angulares

**MEDIDA DE ÁNGULOS:** la magnitud de un ángulo no depende de la longitud de sus lados, sino de la abertura o separación que hay entre ellos, es decir, la medida de un ángulo se obtiene comparando la amplitud del ángulo con la amplitud de otro considerando como unidad patrón. Para medir un ángulo se conocen tres sistemas diferentes de unidades angulares.

**A) Sistema Sexagésimal:** Es el más utilizado. Fue creado por los sumerios quienes debido a su conocimiento del círculo y la circunferencia los dividieron en 360 partes iguales que corresponden a cada uno de los días del año. A cada división se le llama grado y un ángulo de grado es aquel cuyo vértice está en el centro de la circunferencia y sus lados pasan por dos divisiones consecutivas.
Entonces, cada grado es igual a 1/362 del ángulo de la vuelta de la circunferencia. Un grado es 1/90 del ángulo recto. Un grado se divide en 60 partes iguales llamadas minutos y un minuto se divide en 60 partes iguales que se denominan segundos. Se simbolizan de la siguiente manera:

| | |
|---|---|
| Grado (º) | 1º = 60' = 3600" |
| Minuto (') | 1' = 60" |
| Segundo (") | |

**B) Sistema Circular:** Su unidad fundamental es el radian que se define como "un radian es el ángulo cuyos lados comprenden un arco cuya longitud es igual al radio de la circunferencia"




longitud del arco AB = radio (r)

< AOB = 1 radian

La longitud de la circunferencia es $2\Pi$ ,por tanto para un ángulo de 360º= $2\Pi$ ($\Pi$ =3.1416) 360º = 6.2832 radianes.

De la relación radián = 360º/$2\Pi$

1 radián = 57.295777º

**C) Sistema Centesimal:** En este sistema se considera a la circunferencia dividida en 400 partes iguales llamadas grados centesimales. Cada grado centesimal se

divide en 100 partes iguales: minutos centesimales, y un minuto centesimal tiene 100 segundos centesimales.
Se simbolizan como sigue:

| | |
|---|---|
| Grado Centesimal (g) | 1g = 100 m = 10 000 s |
| Minuto Centesimal (m) | 1m = 100 s |
| Segundo Centesimal (s) | |

**Ejercicios:**

1. Un grado sexagesimal es igual a 60', 15º ¿Cuántos minutos son?
2. Un minuto sexagesimal es igual a 60 segundos, 29' ¿Cuántos segundos son?
3. 48º 37' = ___________________________________segundos sexagesimales
4. 97353" = ___________________________________grados y minutos
5. Longitud de la circunferencia = ______________________________radianes
6. La relación $\frac{360°}{2\pi}$ =

- **Conversiones:**

*1. Radianes a grados sexagesimales.*

2Π rad ________________ 360º
1 rad __________________ xº

Despejando:

$$x° = \frac{(360°)(1rad)}{2\pi rad}$$

Simplificando:

$$x° = \frac{(180°)}{\pi}$$

2. *Grados sexagesimales a radianes:*

360º _____________________ 2 Π rad
1º _____________________ x rad

Despejando:

X rad $=\dfrac{(2\pi rad)(1°)}{360°}$

Simplificando:

x rad $= \dfrac{(\pi\ rad)(°\ sexagesimales)}{180°}$

**Ejemplos:**

1. *Convertir 3.25 rad a grados sexagesimales*

   xº $= \dfrac{(180°)(R)}{\pi rad} = \dfrac{(180°)(3.25 rad)}{3.1416\ rad}$ = 186º 12' 39"

2. *Convertir $\frac{3\Pi}{8}$ rad en grados sexagesimales*

xº $= \dfrac{(180°)(\frac{3}{8}\pi rad)}{\pi rad} = \dfrac{(180°)(3\pi rad)}{8\pi\ rad} = \dfrac{(540°)}{8}$ = 67º 30'

3. *Convertir 115º en radianes*

X rad $= \dfrac{(\pi rad)(115°)}{180°} = \dfrac{(3.1416 rad)(115°)}{180°}$ = 2.0071

3. *Convertir 64º 37' en rad*

primero los minutos se convierten a grados

47' ----x<br>60' ----1º

$\dfrac{37'}{60}$ = 0.61666

64.666

x rad = $\dfrac{\Pi \text{ rad } (64.6166º)}{180º}$ = 1.12777 rad

**Ejercicios:**

1. Expresar en grados sexagesimales los siguientes ángulos

a) 3.75 rad ____________________
b) 5.49 rad ____________________
c) 5.63 rad ___________________
d) 7.4346 rad _________________

2. Convertir los siguientes ángulos en radianes

a) 39º _______________________
b) 128º ______________________
c) 239º ____________________
d) 548º ____________________

3. Convertir, expresando grados, minutos y segundos

a) 0.79483 rad _____________________
b) 2.28563 rad _____________________

4. Convertir a radianes

a) 219º05'36" = _________________________
b) 171º27'42" = _________________________

- **Conteste las siguientes preguntas.**

1. Nombra los sistemas que se usan para medir ángulos.

2. Da el nombre y el símbolo del sistema sexagesimal.

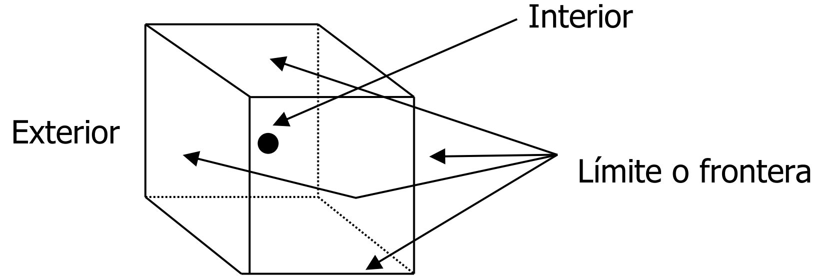
3. Explica el sistema sexagesimal.

4. ¿Cómo se define el radian?

# 3 SÓLIDOS

Son aquellos que ocupan un lugar en el espacio y tienen superficies completamente planas o curvas.

Tienen tres dimensiones: *largo, ancho y altura.*




**Área Total:** Es la medida del límite o frontera entre el interior y exterior del sólido geométrico; se obtiene desarrollando la fórmula correspondiente.

**Volumen:** Es la medida del espacio que se localiza en el interior del sólido geométrico; se obtiene desarrollando la fórmula correspondiente.

**Unidades de Área:** Son las que se utilizan para expresar el área de cualquier figura ($m^2$).

**Unidades de Volumen:** Son las que se utilizan para exponer figuras con tres dimensiones o sólidos ($m^3$).

## 3.1. Prisma

<u>Área y volumen del prisma.</u>

**Área Total:** Se obtiene calculando las áreas de sus caras laterales (Ph), es decir, calculando el perímetro de la base del prisma y multiplicándolo por su altura, después se suma con las áreas de sus dos bases iguales.

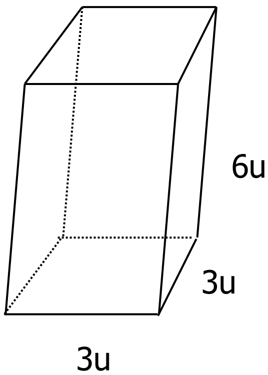
$$A = Ph + 2B$$

**Volumen:** Se obtiene el área de la base (B) y se multiplica por la altura (h):

$$V = Bh$$

**Ejemplos:**

Calcular el área total y el volumen del siguiente prisma cuadrangular.




Área Total

$A= Ph+2B$

$A= 4(a)h+2\ a^2$

$A= 4(a)(6u)+2(3u)^2$

$A= 4(3u)(6u)+2(9u\ ^2)$

$A= (12u)(6u)+18u^2$

$A= 72u^2 +18u^2$

$A= 90u^2$

Volumen

$V= Bh$

$V= (a^2)\ (h)$

$V= (3u)^2\ (6u)$

$V= (9u^2)(6u)$

$V= 54u^3$

## 3.2 Paralelepípedos

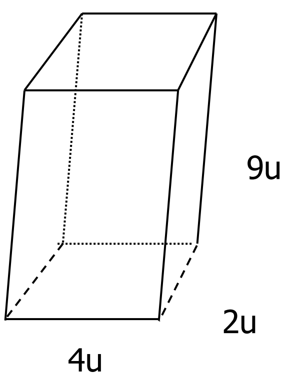
Son prismas cuyas bases son paralelogramos
El área y el volumen se obtienen utilizando las fórmulas.

$A= Ph + 2B$ $\qquad\qquad$ $V= Bh$

Considerando que su base es un cuadrilongo.

**Ejemplo:**

Obtener el área total y el volumen del siguiente Paralelepípedo.




Área Total

$A= Ph + 2B$

$A= 2(a+b)$

$A= ba$

$A= 2(a+b)h+2(ba)$

$A= 2(4u+2u)(9u)+2(4u)(2u)$

$A= 2(6u)(9u)+16u^2$

$A= 108u^2 + 16u^2$

$A= 124u^2$

Volumen

$V= Bh$

$V= (ba)\ h$

$V= (4u)(2u)(9u)$

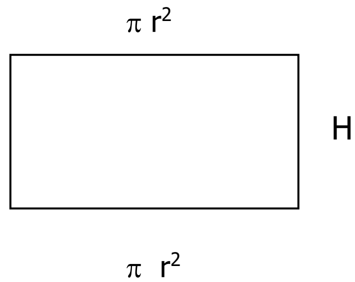
$V= 72u^3$

## 3.3 Cilindro

Se llama cilindro de revolución o cilindro circular recto a la porción de espacio limitado por una superficie cilíndrica de revolución y dos planos perpendiculares al eje. Las secciones producidas por dichos planos, son dos círculos llamados bases del cilindro. La distancia entre las bases se llama altura.

Para calcular el área de un cilindro, se suma el área lateral con el área de las bases.

$A= \pi\, d\, h + 2\, \pi\, r^2$

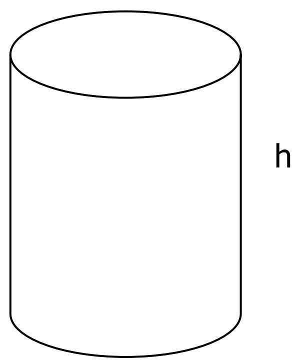



como $d= 2r$

$A= \pi\, 2\, r\, h + 2\, \pi\, r^2$

$A= 2\, \pi\, r\, (\, h + r)$

**Volumen del Cilindro:** Dado un cilindro de base $B= \pi\, r^2$ y la altura h, el volumen se puede calcular a partir de la fórmula de los prismas.



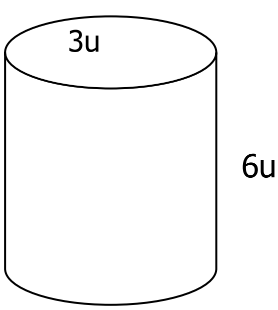

$V= B\, h$

Pero $B= \pi\, r^2$

Entonces $V= (\, \pi\, r^2)\, h$

**Ejemplo:**

Calcular el área y volumen de un cilindro que mide 6u de altura y 3 u de radio en su base.

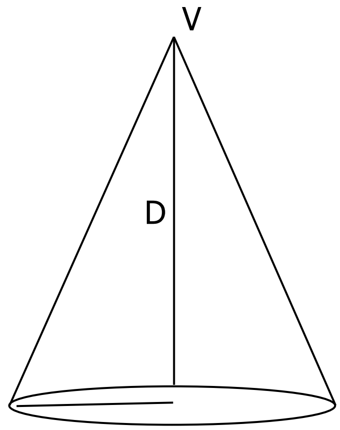



| ÁREA TOTAL | VOLUMEN |
|---|---|
| $A= 2\pi\, r\, (h+r)$ | $V= (\pi\, r^2\, )H$ |
| $A= 2(3.14)3u(6u+3u)$ | $V= (3.14)(3u)^2\, (6u)$ |
| $A= (6.28)(27u^2\, )$ | $V= (3.14)(18u)$ |
| $A= 169.56u^2$ | $V= 56.52u^3$ |

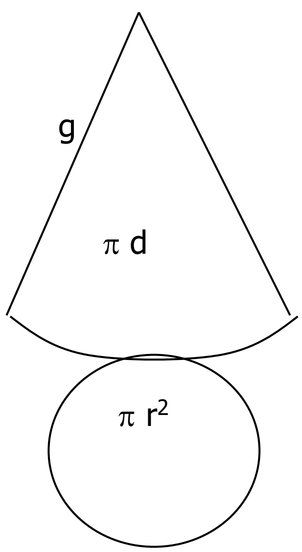
## 3.4 Cono

Si una semirrecta $\overrightarrow{AV}$ que tiene su origen en un punto de la recta $\overleftrightarrow{VO}$ que es perpendicular al plano de un círculo en su centro gira alrededor de VD. pasando sucesivamente por los puntos de la circunferencia, genera una superficie cónica de revolución.

La recta $\overleftrightarrow{VO}$ es el eje de la superficie cónica; la semirrecta $\overrightarrow{VA}$ la GENERATRIZ y la circunferencia se llama DIRECTRIZ.




**Área Total:** Se calcula sumando el área lateral (el semi producto de $\pi$ por el diámetro por la generatriz) con el área de su base.



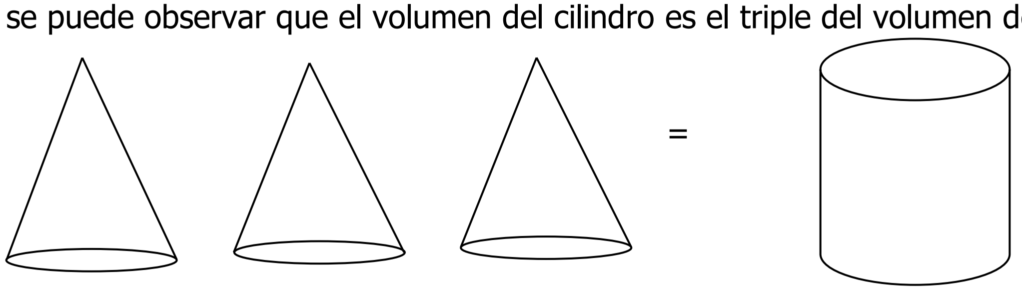

$$A = \frac{\pi\, d\, g}{2} + \pi\, r^2$$

como $d = 2r$

$$A = \frac{\pi\, \cancel{2}\, r\, g}{\cancel{2}} + \pi\, r^2 \qquad\qquad A = \pi\, r\,(g+r)$$

$$A = \pi\, r\, g + \pi\, r^2$$

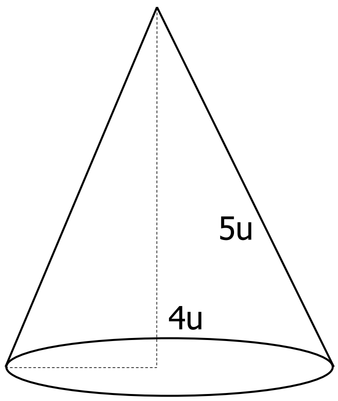
**Volumen del Cono:** Al construir un cilindro y un cono con bases y alturas iguales, se puede observar que el volumen del cilindro es el triple del volumen del cono.




$3V = \pi\, r^2\, h \;\; \therefore\; V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$

**Ejemplo:**

Calcular el área y volumen de un cono que mide 4u de altura, 5u en su generatriz y 3u en el radio de la base.




ÁREA TOTAL

A= $\pi$ r (g + r)

A= (3.14)(3u)(5u+3u)

A= (3.14)(3u)(8u)

$\boxed{A = 75.36\ u^2}$

VOLUMEN

$V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$

$V = \dfrac{\pi (3u)^2 (4u)}{3}$

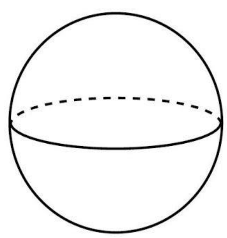
$V = \dfrac{3.14(9u^2)(4u)}{3}$

$\boxed{V = 37.68\ u^3}$

## 3.5 Esfera

La superficie esférica es el lugar geométrico de todos los puntos del espacio que equidistan de un punto interior llamado centro.

La distancia del centro a un punto de la superficie se llama radio. Se llama esfera al conjunto formado por todos los puntos de una superficie esférica y los interiores a la misma.



**Volumen de la Esfera:** Arquímedes, físico y matemático griego, determina que el volumen de la esfera es igual a 2/3 del volumen del cilindro que la circunscribe.

V= $\dfrac{2\,\pi r^2 h}{3}$ como la altura del cilindro.

es igual a dos radios de la esfera V= $\dfrac{2(\pi r^2 2r)}{3}$ $\therefore$ V= $\dfrac{4(\pi r^3)}{3}$

**Área de la Esfera:** La obtención por métodos elementales de la fórmula del área de una esfera es algo laboriosa, por lo que solo daremos la fórmula.

A= 4 $\pi$ $r^2$

**Ejemplo:**
Calcular el área y volumen de una esfera que mide 0.40u de radio.

A= 4 $\pi$ $r^2$

A= 4(3.14)$(0.40u)^2$

A= 4(3.14)$(0.16u^2)$

A= 2.0096 $u^2$

$$V = \frac{4(\pi r^3)}{3}$$

$$V = \frac{4((3.14)(0.40u)^3)}{3}$$

$$V = \frac{4((3.14)(0.064u^3)}{3}$$

$$V = \frac{0.80384u^3}{3}$$

$$\boxed{V= 0.2679u^3}$$

**EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN**

**<u>Subraya la respuesta correcta</u>**

1. ¿Cuál es el polígono cuya suma de ángulos interiores vale 1260º?

   A) ENEÁGONO B) OCTÁGONO C) DECÁGONO

2. ¿Cuál es el polígono cuya suma de ángulos interiores vale 1800º?

   A) ENEÁGONO B) DECÁGONO C) POLÍGONO DE 12 LADOS

3. Hallar el valor de un ángulo interior de un hexágono regular.

   A) 150º B) 130º C) 120º

4. ¿Cuál es el polígono en el cual se pueden trazar 9 diagonales?

   A) 9 LADOS B) 11 LADOS C) 13 LADOS

5. ¿Cuál es el perímetro de un cuadrilongo cuyo lado más largo mide 7.3 cm y su lado más pequeño mide 4.8 cm?

   A) 24.2 cm B) 12.2 cm C) 25 cm

6. ¿Cuál es el perímetro de un trapecio cuya base mayor mide 12.5 cm, su base menor 7.9 m y sus lados iguales miden 9.7 m cada uno?

   A) 38.8 m　　B) 40 m　　C) 39.8 m

7. El área de un rectángulo es de 216m$^2$ y su base es 6m mayor que su altura. Hallar sus dimensiones.

   A) b = 17 m　h = 11 m　　B) b = 18 m　h = 12 m　　C) b = 19 m　h = 13 m

8. Hallar el radio de una circunferencia cuya longitud es 628 cm.

   A) 1 m　　B) 3 m　　C) 2 m

9. Hallar el área total de un cono que mide 5 cm de altura, 6 cm en su generatriz y 4 cm en el radio de su base.

   A) A= 135.66 cm$^2$　　B) A= 125.66 cm$^2$　　C) A = 115.66 cm$^2$

10. Hallar el volumen de un prisma pentagonal donde uno de sus lados de su base mide 7 cm, su apotema vale 6.2 cm y la altura del prisma es de 9.5 cm.

   A) 1029.75 cm$^3$　　B) 1031.75 cm$^3$　　C) 1030.75 cm$^3$

## RESULTADOS DE AUTOEVALUACIÓN.

**1.** A
**2.** C
**3.** C
**4.** B
**5.** A
**6.** C
**7.** B
**8.** A
**9.** B
**10.**

## ***BIBLIOGRAFIA:***


- BALDOR, J. A, *Geometría Plana y del Espacio,* Publicaciones Culturales, México, 1996.
- CATALA ALSINA (2000) SORPRESAS GEOMÉTRICAS, LOS POLÍGONOS, LOS POLIÉDROS Y USTED. Buenos Aires, Red Olímpica.
- Baldor, A. (2008). *Geometría y Trigonometría (2 ed.)*. México: Patria**.**